Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева

МАТЕМАТИКА
ЕГЭ 2019
Книга 1

- ✓ *более 2600 заданий с кратким ответом*
- ✓ *тематические контрольные работы*
- ✓ *Базовый уровень*
- ✓ *Профильный уровень*

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2019

Содержание

Предисловие

Перед Вами одна из трёх книг, входящих в учебно-методический комплект «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2019». Этот учебно-методический комплект поможет выпускнику добиться необходимого ему результата на ЕГЭ по математике.

В соответствии с целями, которые ставят перед собой выпускники на экзамене, можно выделить среди них три основные группы:

1) выпускники, которым достаточно получить по математике «зачёт», т.е. сдать экзамен не на двойку;

2) выпускники, которым необходимо набрать не менее 65 сертификационных баллов, что является проходным баллом по математике в большинство ВУЗов;

3) выпускники, которым необходимо набрать не менее 80 сертификационных баллов — это достаточно высокие баллы, позволяющие поступить в самые престижные ВУЗы с большим конкурсом (при условии столь же успешной сдачи других экзаменов).

Если переводить сертификационные баллы в школьную пятибалльную систему, то в первую группу следует отнести тех выпускников, чья обычная оценка по математике не превышает отметки «удовлетворительно». А во вторую и третью группы относятся те выпускники, чья средняя оценка по математике, соответственно, «хорошо» и «отлично».

Не секрет, что с делением ЕГЭ на «Базовый» и «Профильный» экзамены, и без того непростая работа учителей выпускных классов значительно усложнилась. Ведь практически в любом классе встречаются как ученики первой из вышеуказанных групп, так и второй и третьей. Причём выпускники первой группы чаще выбирают «Базовый» экзамен, а второй и третьей группе обязательно нужен сертификат «Профильного» ЕГЭ.

Как же быть педагогу, если в одном и том же классе часть учеников сдаёт «Базовый» ЕГЭ, а часть — «Профильный»? В процессе подготовки такого класса к ЕГЭ учителю очень пригодится именно данное пособие — ведь оно реально трёхуровневое!

Для школьников, выбравших «Базовый» ЕГЭ, предназначены те задания, прототипы[1] которых не отмечены никаким дополнительным символом.

[1] в данной книге все задания сгруппированы по типам, под прототипом понимается первая среди задач какого-либо типа, номер каждого нового прототипа выделяется квадратиком

Для школьников, выбравших «Профильный» ЕГЭ и ставящих перед собой цель набрать не менее 65 сертификационных баллов, предназначены те задания, прототипы которых отмечены символом ^{X} (как правило, эти выпускники знают математику не хуже, чем на твёрдую четвёрку, то есть являются «Хорошистами»).

Для школьников, ставящих перед собой цель набрать не менее 80 сертификационных баллов «Профильного» ЕГЭ, предназначены те задания, прототипы которых отмечены символом ^{O} (ведь чтобы рассчитывать на 80 сертификационных баллов, необходимо знать школьную программу по математике на «Отлично»).

Заметим, что «хорошистам» нужно прорешивать не только задания, отмеченные символом ^{X}, но также и все задания «базового» уровня. Аналогично, «отличникам» нужно прорешивать и задания «базового» уровня, и задания, предназначенные для «хорошистов». Это абсолютно необходимо для того, чтобы подготовиться к ЕГЭ с запасом прочности. Как показывает практика, очень многие сильные ученики допускают на экзамене несколько досадных ошибок при решении заданий первой части экзаменационной работы.

В завершение предисловия скажем кратко о структуре пособия.

О структуре пособия

Данное пособие содержит задачник, в который включены все типы заданий с кратким ответом из банка заданий ЕГЭ, а также тематические контрольные работы. Общее число задач пособия, включая задания контрольных работ, составляет более 2600!

Пособие состоит из трёх разделов: «Алгебра и начала анализа», «Геометрия», «Задачи с практическим содержанием». Каждый из этих трёх разделов разбит на несколько параграфов (общее число параграфов во всех трёх разделах равно 12). Внутри каждого параграфа сначала приводится список упражнений на одну из тем школьного курса математики, затем приводятся решения наиболее сложных из этих упражнений, а в конце параграфа даётся одна или несколько контрольных работ, каждая из которых содержит по 10 вариантов.

Отметим, что в соответствии с концепцией трёхуровневости данного пособия, в каждой контрольной работе приведены как варианты «базового» уровня сложности, так и варианты для «хорошистов» и «отличников». Первые четыре варианта каждой работы предназначены для выпускников, выбирающих «Базовый» ЕГЭ, следующие четыре варианта рассчи-

таны на «хорошистов», а последние два предназначены для «отличников» (как правило, это самая малочисленная группа учащихся, поэтому двух вариантов повышенной сложности вполне достаточно).

Необходимым дополнением данной книги являются ещё два пособия, входящие в учебно-методический комплект «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2019». Это пособия «Математика. ЕГЭ 2019. Книга 2. Базовый уровень» и «Математика. ЕГЭ 2019. Книга 2. Профильный уровень».

Регулярное решение задач из данного пособия, начиная с 10 класса, поможет учащимся освоить школьный курс математики на более глубоком уровне, что, в свою очередь, будет способствовать успешной сдаче ЕГЭ.

Желаем Вам успехов!

Раздел I. Алгебра и начала анализа

Холодные числа, внешне сухие формулы
математики полны внутренней красоты
и жара сконцентрированной в них мысли.
А. Д. Александров

§ 1. Преобразования выражений

В заданиях 1—303 найдите значение данного выражения.

Рациональные выражения

$\boxed{1}$ $\left(\frac{5}{6}+2\frac{2}{5}\right)\cdot 7{,}5$

2. $\left(\frac{1}{8}-3\frac{5}{11}\right)\cdot 2{,}2$

3. $\left(\frac{2}{9}+1\frac{9}{12}\right)\cdot 7{,}2$

4. $\left(\frac{13}{15}+14\frac{1}{20}\right)\cdot 12$

5. $\left(\frac{11}{6}\cdot 0{,}9-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(9\cdot\frac{5}{12}-\frac{16}{25}\right)$

6. $\left(\frac{4}{7}\cdot 2{,}8-\frac{16}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\cdot 0{,}018-\frac{3}{8}\right)$

7. $\left(\frac{13}{9}\cdot 2{,}7+\frac{15}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}36-\frac{3}{25}\right)$

8. $\left(\frac{27}{5}+\frac{17}{7}\cdot 0{,}14\right)\cdot\left(\frac{15}{19}\cdot 0{,}0475-\frac{7}{16}\right)$

$\boxed{9}$ $\frac{0{,}27}{25}\cdot\frac{0{,}4}{0{,}72}$

10. $\frac{0{,}64}{8{,}1}\cdot\frac{2{,}43}{12{,}8}$

11. $\frac{4{,}8}{49}\cdot\frac{3{,}43}{84}$

12. $\frac{9{,}9}{0{,}35}\cdot\frac{4{,}2}{36}$

13. $\frac{0{,}024}{3{,}4}\cdot\frac{0{,}51}{18}$

14. $\frac{34}{0{,}7}\cdot\frac{5{,}6}{0{,}68}$

15. $\frac{14}{3}\cdot\frac{1{,}5}{0{,}028}$

16. $\frac{0{,}33}{5}\cdot\frac{21}{7{,}7}$

$\boxed{17}$ $0{,}1\cdot 0{,}02\cdot 0{,}004$

18. $0{,}002\cdot 0{,}03\cdot 0{,}5$

19. $5{,}5\cdot 0{,}55\cdot 0{,}000022$

20. $0{,}0007\cdot 0{,}006\cdot 0{,}16$

21. $\frac{0{,}01\cdot 0{,}002}{0{,}0004}$

22. $\frac{0{,}003\cdot 0{,}0004}{0{,}000006}$

23. $\frac{0{,}6\cdot 0{,}02\cdot 0{,}003}{0{,}00000018}$

24. $\frac{0{,}05\cdot 0{,}004\cdot 0{,}0006}{0{,}00000008}$

$\boxed{{}^{x}25}$ $x\cdot(100-9x^2)\cdot\left(\frac{1}{3x+10}-\frac{1}{3x-10}\right)$ при $x=14{,}5$

26. $\left(\frac{a+4}{a-4}-\frac{a-4}{a+4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{a}\right)$ при $a=3{,}96$

27. $\left(\frac{1}{2(b-1)}+\frac{1}{2(b+1)}+\frac{1}{b-b^3}\right):\left(\frac{b-1}{b}-\frac{b}{b+1}\right)$ при $b=0{,}61$

28. $\frac{m}{3m+2}\cdot\left(\frac{1}{2m-3}+\frac{m}{2m+3}\right):\left(\frac{m}{3m+2}+\frac{m^2}{3m-2}\right)$ при $m=-1{,}375$

29. $\frac{3}{a^2b-ab^2}:\frac{6}{ab^3-a^3b}$ при $a=0{,}8,\ b=0{,}9$

30. $\frac{1}{a^4b^2-a^2b^4}:\frac{145}{a^4-b^4}$ при $a=0{,}2,\ b=0{,}5$

31. $\frac{a^4-b^4}{a+b}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}$ при $a=\sqrt{5}-4,\ b=\sqrt{5}+4$

32. $\frac{a^3+b^3}{ab}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a^6-b^6}$ при $a=\sqrt{15}-5,\ b=\sqrt{15}+5$

x33 $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$ при $x=0{,}008$

34. $\dfrac{x^2+10x}{x^2+x-90}$ при $x=8{,}98$

35. $\dfrac{x^2+30x}{x^2+10x-600}$ при $x=21{,}28$

36. $\dfrac{x^2-5x-66}{x^2-18x+77}$ при $x=13{,}4$

37. $\dfrac{x^6+x^3-30}{x^3+6}$ при $x=0{,}5$

38. $\dfrac{x^2-81}{x^3+18x^2+81x}$ при $x=-8$

39. $\dfrac{x^3-16x}{x^2-8x+16}$ при $x=3{,}5$

40. $\dfrac{25x^3-36x}{5x^2-31x+30}$ при $x=1{,}8$

x41 $\dfrac{a}{b}$, если $\dfrac{a-b}{3a+5b}=11$

42. $\dfrac{a+b}{a}$, если $\dfrac{7b-51a}{11a+12b}=6$

43. $\dfrac{2a+3b}{4a-5b}$, если $\dfrac{17a-b}{7a+8b}=-5$

44. $\dfrac{3a+8b}{8a-3b}$, если $\dfrac{59a+168b}{13a+8b}=7$

45. $4a-24b-3$, если $\dfrac{10a-3b}{3a+b+1}=3$

46. $44a-16b+12$, если $\dfrac{3a-7b+1}{7a-3b-1}=13$

47. $3a-12b+8$, если $\dfrac{a+b}{a+2b+1}=\dfrac{5}{6}$

48. $6a-15b+10$, если $\dfrac{2a-3b}{a-b+2}=\dfrac{4}{3}$

o49 $2x+y+10z$, если $4x+y=5$, $y+20z=6$

50. $x+y+2z$, если $7x+5y=3$, $y+7z=9$

51. $x+y+6z$, если $x-4y=5$, $15y+18z=33$

52. $x-3y+4z$, если $2x+3y=1$, $9y-8z=19$

53. $x+2y-3z$, если $4x+y=6$, $12z-7y=20$

54. $x+4x-5z$, если $2x+5y=3$, $6y-20z=5$

55. $x-12y+15z$, если $5x-3y=2$, $25z-19y=6$

56. $x-5x-3z$, если $2x-y=4$, $3y+2z=6$

Арифметический корень

57 $\left(\sqrt{3\frac{1}{3}}-\sqrt{7\frac{1}{2}}\right):\sqrt{\frac{5}{24}}$

58. $\left(\sqrt{3\frac{3}{5}}-\sqrt{6\frac{2}{5}}\right):\sqrt{\frac{2}{45}}$

59. $\left(\sqrt{7\frac{5}{7}}+\sqrt{3\frac{3}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{56}}$

60. $\left(\sqrt{16\frac{9}{10}}+\sqrt{19\frac{6}{10}}\right):\frac{1}{\sqrt{250}}$

61. $\left(\sqrt{32\frac{2}{3}}+\sqrt{112\frac{2}{3}}\right):\frac{4}{\sqrt{216}}$

62. $\left(\sqrt{3\frac{1}{5}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}\right):\frac{5}{\sqrt{180}}$

63. $\left(\sqrt{4\frac{1}{6}}+\sqrt{1\frac{1}{2}}\right):\frac{\sqrt{150}}{3}$

64. $\left(\sqrt{14\frac{2}{5}}+\sqrt{22\frac{1}{2}}\right):\frac{\sqrt{160}}{7}$

65 $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20-\sqrt{15}}\cdot\sqrt{20+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{77}$

66. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{15-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{15+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{109}$

67. $\sqrt[3]{4-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{121}$

68. $\sqrt[3]{3+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}-3}\cdot\sqrt[3]{32}$

69. $\sqrt[4]{5-\sqrt{13}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{13}+5}\cdot\sqrt[4]{108}$

70. $\sqrt[5]{8-\sqrt{37}}\cdot\sqrt[5]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[5]{9}$

71. $\sqrt[4]{7-\sqrt{41}}\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{41}}\cdot\sqrt[4]{162}$

72. $\sqrt[5]{0{,}7-\sqrt{0{,}17}}\cdot\sqrt[5]{0{,}7+\sqrt{0{,}17}}\cdot\sqrt[5]{0{,}001}$

73 $\dfrac{\sqrt{0{,}06}\cdot\sqrt{5{,}4}}{\sqrt{10}}$

74. $\dfrac{\sqrt{44}\cdot\sqrt{110}}{\sqrt{0{,}1}}$

75. $\dfrac{\sqrt{210}\cdot\sqrt{28}}{\sqrt{0{,}3}}$

76. $\dfrac{\sqrt{5{,}6}\cdot\sqrt{2{,}4}}{\sqrt{0{,}21}}$

77. $\dfrac{\sqrt{1{,}5}\cdot\sqrt{2{,}1}}{\sqrt{0{,}35}}$

78. $\dfrac{\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{1{,}05}}{\sqrt{0{,}14}}$

79. $\dfrac{\sqrt{0{,}05}\cdot\sqrt{0{,}7}}{\sqrt{0{,}0014}}$

80. $\dfrac{\sqrt{0{,}08}\cdot\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{0{,}0015}}$

x81 $3\cdot\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[6]{49}$

82. $14\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[12]{27}$

83. $25\cdot\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[20]{16}$

84. $0{,}65\cdot\sqrt[5]{625}\cdot\sqrt[20]{625}$

85. $\dfrac{\sqrt[6]{72}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{8}}$

86. $\dfrac{\sqrt[9]{27}}{\sqrt[9]{216}\cdot\sqrt[3]{4}}$

87. $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[15]{64}$

88. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{81}$

x89 $x+3+\sqrt{x^2-6x+9}$ при $x=0{,}31$

90. $5-3x+\sqrt{9x^2-30x+25}$ при $x=0{,}53$

91. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}$ при $x=\sqrt{7}$

92. $\sqrt{x^2-14x+49}+\sqrt{x^2-22x+121}$ при $x=\sqrt{117}$

93. $\sqrt[4]{(x+4)^4}+\sqrt[4]{(x+4{,}5)^4}$ при $x=-\sqrt{17}$

94. $\sqrt[8]{(x+8)^8}+\sqrt[8]{(x+8{,}1)^8}$ при $x=-\sqrt{65}$

95. $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}$ при $x=2{,}012$

96. $\sqrt[12]{(x^2-10x+25)^6}+\sqrt{x^2-6x+9}$, если $4<x<4{,}5$

x97 $\sqrt[6]{12-6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{36}$

98. $\sqrt[10]{23-6\sqrt{14}}\cdot\sqrt[5]{3+\sqrt{14}}\cdot\sqrt[5]{625}$

99. $\sqrt[8]{14-6\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}$

100. $1{,}32\cdot\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[6]{4+3\sqrt{2}}\cdot\sqrt[12]{34-24\sqrt{2}}$

101. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

102. $\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$

103. $\sqrt{30+5\sqrt{20}}+\sqrt{30-5\sqrt{20}}$

104. $\sqrt{56+7\sqrt{28}}+\sqrt{56-7\sqrt{28}}$

Выражения, содержащие степень

105 $4^{3-\sqrt{7}}\cdot4^{3+\sqrt{7}}$

106. $5^{2+\sqrt{10}}\cdot5^{2-\sqrt{10}}$

107. $8^{\sqrt{3}-9}\cdot8^{12-\sqrt{3}}$

108. $15^{\sqrt{5}-3}\cdot15^{5-\sqrt{5}}$

109. $6^{1-2\sqrt{3}}\cdot 6^{2+\sqrt{12}}$

110. $0{,}2^{2\sqrt{2}-3}\cdot 0{,}2^{1-\sqrt{8}}$

111. $0{,}4^{5-\sqrt{45}}\cdot 0{,}4^{3\sqrt{5}-2}$

112. $2{,}5^{2-\sqrt{24}}\cdot 2{,}5^{2\sqrt{6}-6}$

$\boxed{113}$ $7^4\cdot 3^7:21^3$

114. $5^6\cdot 4^8:20^5$

115. $6^9\cdot 3^6:18^7$

116. $0{,}2^3\cdot 0{,}5^4:0{,}1^5$

117. $0{,}2^{13}\cdot 0{,}15^{15}:0{,}03^{14}$

118. $8^7\cdot 6^5:4^{14}$

119. $10^6\cdot 5^{12}:25^8$

120. $14^3\cdot 16^5:2^{25}$

$\boxed{121}$ $\dfrac{42}{2^5\cdot 5^3}$

122. $\dfrac{7200}{2^4\cdot 5^6}$

123. $\dfrac{63000}{2^6\cdot 5^7}$

124. $\dfrac{8500000}{2^8\cdot 5^5}$

125. $\left(3\cdot 2^{-3}\right)\cdot\left(7\cdot 5^{-4}\right)$

126. $\left(9\cdot 2^{-4}\right)\cdot\left(6\cdot 5^{-5}\right)$

127. $\left(25\cdot 2^{-5}\right)\cdot\left(3\cdot 5^{-3}\right)$

128. $\left(16\cdot 5^{-4}\right)\cdot\left(125\cdot 2^{-8}\right)$

$\boxed{\text{x}129}$ $\dfrac{5^{5,5}}{25^{1,25}}$

130. $\dfrac{7^{3,5}}{49^{0,25}}$

131. $\dfrac{8^{5,5}}{2^{7,5}}$

132. $\dfrac{128^{2,5}}{8^{4,5}}$

133. $0{,}1^{0,78}\cdot 0{,}01^{0,11}$

134. $\left(0{,}027^{-\frac{1}{6}}\cdot 0{,}3^{6,5}\right)^{\frac{1}{3}}$

135. $\left(0{,}25^{-0,25}\cdot 0{,}5^{12,5}\right)^{0,25}$

136. $\left(0{,}0016^{0,75}\cdot 0{,}04^{2,5}\right)^{0,125}$

$\boxed{\text{x}137}$ $\dfrac{3^{2,5}\cdot 6^{6,5}}{18^{4,5}}$

138. $\dfrac{7^{9,5}\cdot 5^{5,5}}{35^{6,5}}$

139. $54^{-3,9}\cdot 9^{4,9}:6^{-2,9}$

140. $72^{-4,8}\cdot 8^{2,8}:9^{-6,8}$

141. $0{,}3^{0,2}\cdot 9^{0,4}\cdot 10^{1,2}$

142. $0{,}4^{\frac{1}{7}}\cdot 4^{\frac{3}{7}}\cdot 5^{\frac{15}{7}}$

143. $0{,}6^{\frac{4}{9}}\cdot 5^{\frac{8}{9}}\cdot 15^{\frac{5}{9}}$

144. $3{,}5^{\frac{3}{5}}\cdot 0{,}25^{-\frac{9}{5}}\cdot 7^{\frac{2}{5}}$

$\boxed{\text{x}145}$ $\dfrac{m^{\frac{5}{6}}\cdot m^{\frac{1}{9}}}{m^{\frac{5}{18}}}$ при $m=27$

146. $\dfrac{m^{\frac{11}{14}}\cdot m^{\frac{1}{6}}}{m^{-\frac{5}{7}}}$ при $m=216$

147. $\dfrac{n^{0,4}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{15}}}$ при $n=256$

148. $\dfrac{n^{0,2}}{n^{-\frac{2}{15}}\cdot n^{-\frac{20}{21}}}$ при $n=128$

149. $\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{x}}$, если $x^{\frac{3}{2}}=0{,}008$

150. $\dfrac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{a^9}$, если $a^{17}=625$

151. $\dfrac{\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt[10]{b}}{b^{\frac{15}{4}}}$, если $b^{13}=16$

152. $\dfrac{\sqrt[8]{b^7}\cdot\sqrt[16]{b}}{b^{\frac{5}{4}}}$, если $\sqrt[32]{b}=2$

$\boxed{\text{x}153}$ $\dfrac{6^{n+1}}{3^{n-1}}$, если $2^n=15$

154. $\dfrac{10^{n-1}}{2^{n-2}}$, если $5^n=24$

155. $\dfrac{3^{n+2}}{12^{n+3}}$, если $2^{n+3}=\dfrac{1}{6}$

156. $\dfrac{5^{n-1}}{45^{n-3}}$, если $3^{n-2}=\dfrac{1}{5}$

157. $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+4}}{\left(\sqrt{21}\right)^{n-2}}$, если $7^n=16$

158. $\dfrac{\left(\sqrt{22}\right)^{n+3}}{\left(\sqrt{11}\right)^{n-1}}$, если $2^{n+3}=9$

159. $\dfrac{\left(\sqrt{30}\right)^{n+5}}{\left(\sqrt{6}\right)^{n-3}}$, если $5^{n+5}=36$

160. $\dfrac{\left(\sqrt{60}\right)^{n+6}}{\left(\sqrt{5}\right)^{n-2}}$, если $144^{4n+8}=81$

$\boxed{\text{x}161}$ $\dfrac{\left(\sqrt{10}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^{n}}{3^{n-2}\cdot 20^{n+3}}$ при $n=-4$

162. $\dfrac{\left(\sqrt{6}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{12}\right)^{n}}{2^{n+3}\cdot 18^{n}}$ при $n=-6$

163. $\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{45}\right)^{n}}{3^{n-2}\cdot 25^{n+4}}$ при $n=-10$

164. $\dfrac{\left(\sqrt{6}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{15}\right)^{n}}{3^{n-1}\cdot 10^{n+1}}$ при $n=-8$

165. $\dfrac{\left(\sqrt{12}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{14}\right)^{n}}{2^{n+2}\cdot 42^{n}}$ при $n=-6$

166. $\dfrac{\left(\sqrt{50}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{44}\right)^{n}}{11^{n+1}\cdot 550^{n}}$ при $n=-2$

167. $\dfrac{\left(\sqrt{245}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{56}\right)^{n}}{5^{n-5}\cdot 70^{n}}$ при $n=4$

168. $\dfrac{\left(\sqrt{33}\right)^{n}\cdot\left(\sqrt{63}\right)^{n}}{3^{n+2}\cdot 231^{n}}$ при $n=-4$

Тригонометрические выражения

$\boxed{169}$ $6-7\cos^2 x$, если $\sin^2 x=0{,}3$

170. $17-70\sin^2 x$, если $\cos^2 x=0{,}17$

171. $3-5\sin^2 x$, если $\cos x=-0{,}4$

172. $51-15\cos^2 x$, если $\sin x=-0{,}1$

173. $2+3\operatorname{tg}^2 x$, если $\cos^2 x=0{,}6$

174. $4+5\operatorname{ctg}^2 x$, если $\sin^2 x=0{,}2$

175. $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $45\sin^2\alpha+11\cos^2\alpha=20$

176. $\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $25\sin^2\alpha+44\cos^2\alpha=36$

$\boxed{177}$ $12\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$

178. $22\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{6\sqrt{2}}{11}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

179. $39\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{4\sqrt{10}}{13}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

180. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$

181. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

182. $\dfrac{7}{\sqrt{70}}\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{70}}{17}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$

183. $\sqrt{7}\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin^2\alpha=\dfrac{4}{11}$ и $\alpha\in\left(3\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right)$

184. $12\sqrt{13}\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos^2\alpha=\dfrac{9}{22}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{9\pi}{2};5\pi\right)$

$\boxed{^{\text{x}}185}$ $\sqrt{10}\cdot\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\alpha\in(\pi; 2\pi)$

186. $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

187. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$ и $\alpha\in(\pi; 2\pi)$

188. $\frac{9}{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -7$ и $\alpha\in\left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$

189. $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{10}}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$ и $\alpha\in\left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$

190. $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$ и $\alpha\in(-2\pi; -\pi)$

191. $\frac{\sqrt{65}}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 8$ и $\alpha\in(3\pi; 4\pi)$

192. $\frac{\sqrt{290}}{\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -17$ и $\alpha\in\left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right)$

$\boxed{193}$ $9\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) - 3\cos(3\pi+\alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$

194. $8\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\beta\right) + 11\sin(7\pi+\beta)$, если $\sin\beta = \frac{1}{6}$

195. $\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2}-\gamma\right)\cdot\cos\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\gamma$, если $\cos\gamma = 0{,}2$

196. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}7$

197. $\sin(450^\circ+x)\cdot\cos(540^\circ+x)\cdot\cos(990^\circ-x)$, если $\sin x = 0{,}9$

198. $\operatorname{tg}(270^\circ-x)\cdot\sin(810^\circ-x)\cdot\sin(900^\circ+x)$, если $\sin x = 0{,}3$

199. $\operatorname{ctg}(630^\circ-x)\cdot\sin(720^\circ+x)\cdot\operatorname{tg}(1350^\circ-x)$, если $\sin x = 0{,}25$

200. $\sin(360^\circ-2x)\cdot\cos(810^\circ+x)\cdot\operatorname{tg}(1080^\circ+x)$, если $\sin x = 0{,}1$

$\boxed{^{\text{x}}201}$ $21\cdot\sin 945^\circ\cdot\sin 675^\circ$

202. $12\cdot\operatorname{tg}600^\circ\cdot\sin 1020^\circ$

203. $\sqrt{6}\cdot\cos 585^\circ\cdot\operatorname{tg}660^\circ$

204. $84\cdot\sin 1530^\circ\cdot\cos 480^\circ$

205. $\operatorname{ctg}300^\circ\cdot\sin 210^\circ\cdot\cos 1230^\circ$

206. $\sin 420^\circ\cdot\cos 840^\circ\cdot\sin(-480^\circ)$

207. $\operatorname{tg}225^\circ\cdot\sin 780^\circ\cdot\cos 870^\circ$

208. $\sin 555^\circ\cdot\sin 1185^\circ\cdot\operatorname{tg}405^\circ$

$\boxed{^{\text{x}}209}$ $100\cdot\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$

210. $\sqrt{150}\cdot\operatorname{ctg}\frac{52\pi}{3}\cdot\cos\frac{51\pi}{4}$

211. $\sqrt{48}\cdot\operatorname{tg}\frac{47\pi}{4}\cdot\sin\frac{46\pi}{3}$

212. $\operatorname{tg}\frac{130\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{20\pi}{3}$

213. $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{4}\cdot\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{23\pi}{6}$

$\boxed{^{\text{x}}214}$ $\frac{9\sin 11^\circ\cdot\sin 79^\circ}{\sin 22^\circ}$

215. $\frac{19\sin 17^\circ\cdot\sin 73^\circ}{\cos 236^\circ}$

216. $\frac{2\cos^2 68^\circ - 1}{2\cos 113^\circ\cdot\sin 67^\circ}$

217. $\frac{6\cos^2 34^\circ - 3}{\cos 169^\circ\cdot\cos 79^\circ}$

218. $\frac{\sin^2 35^\circ - \cos^2 145^\circ}{\cos 100^\circ\cdot\cos 350^\circ}$

$\boxed{^{\text{x}}219}$ $\frac{8\sin\alpha - 9\cos\alpha}{6\cos\alpha - 7\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$

220. $\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}625$

221. $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{4\cos\alpha - 3\sin\alpha} = 5$

222. $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha + 1}{6\sin\alpha - 5\cos\alpha + 4} = \frac{1}{4}$

223. $\sin 2\alpha$, если $\frac{5\sin\alpha - 6\cos\alpha}{6\sin\alpha - 10\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

Логарифмические выражения

$\boxed{224}$ $\log_2 80 - \log_2 2{,}5$

225. $\lg 12500 + \lg 8000$

226. $\log_4 32 + \log_4 128$

227. $\log_{15} 135 + \log_{15} 25$

228. $\log_3 60{,}75 - \log_3 0{,}75$

229. $\log_6 99 - \log_6 2{,}75$

230. $\log_7 185{,}22 - \log_7 0{,}54$

231. $\log_2 51{,}2 - \log_2 0{,}05$

$\boxed{232}$ $7^{1+\log_7 3}$

233. $8^{4-\log_8 4}$

234. $9^{3-\log_9 6}$

235. $5^{5-\log_5 250}$

236. $10 \cdot 11^{-\log_{11} 4}$

237. $6 \cdot 15^{-\log_{15} 16}$

238. $27 \cdot 17^{-\log_{17} 8}$

239. $84 \cdot 8^{-\log_8 40}$

$\boxed{240}$ $16^{\log_4 10}$

241. $27^{\log_3 4}$

242. $36^{\log_{\sqrt{6}} 5}$

243. $64^{\log_{\sqrt{8}} 3}$

244. $(\sqrt{2})^{\log_2 0{,}04}$

245. $(\sqrt[4]{10})^{\lg 256}$

246. $(\sqrt[3]{13})^{\log_{13} 125}$

247. $(\sqrt[5]{12})^{\log_{12} 32}$

$\boxed{248}$ $33 \cdot \log_5 \sqrt[4]{5}$

249. $56 \cdot \log_6 \sqrt[5]{6}$

250. $88 \cdot \lg \sqrt[10]{10}$

251. $123 \cdot \log_5 \sqrt[40]{5}$

252. $69 \cdot \log_6 \sqrt[3]{36}$

253. $70 \cdot \log_2 \sqrt[5]{16}$

254. $72 \cdot \log_3 \sqrt[27]{27}$

255. $98 \cdot \log_6 \sqrt[7]{216}$

$\boxed{{}^{\text{x}}256}$ $\log_{0,5} \sqrt{2}$

257. $\log_{0,01} \sqrt[5]{1000}$

258. $\log_{0,04} \sqrt[4]{125}$

259. $\log_{0,125} \sqrt[10]{512}$

260. $\log_9 (3\sqrt[4]{3})$

261. $\log_{49} (7\sqrt[4]{343})$

262. $\log_{\frac{1}{75}} (375\sqrt{3})$

263. $\log_{\frac{1}{18}} (972\sqrt{2})$

$\boxed{{}^{\text{x}}264}$ $\dfrac{\log_4 \sqrt[5]{6}}{\log_4 6}$

265. $\dfrac{\log_{12} \sqrt[20]{13}}{\log_{12} \sqrt{13}}$

266. $\dfrac{\log_3 (5\sqrt{6})}{\log_3 \sqrt[4]{150}}$

267. $\dfrac{\log_5 (2\sqrt{65})}{\log_5 \sqrt[5]{260}}$

268. $\dfrac{\log_6 \sqrt[8]{7}}{\log_6 49}$

269. $\dfrac{\log_{0,1} 9}{\lg \sqrt[10]{3}}$

270. $\dfrac{\log_{25} \sqrt[5]{8}}{\log_{0,2} 0{,}25}$

271. $\dfrac{\log_8 \sqrt[4]{27}}{\log_{0,25} \frac{1}{243}}$

$\boxed{^{\text{x}}272}$ $\log_{81} \log_9 729$

273. $\log_{16} \log_{\sqrt[8]{2}} 16$

274. $\log_{625} \log_{\sqrt{5}} \sqrt[50]{5}$

275. $\log_{32} \log_{\sqrt[4]{2}} 256$

276. $\log_{243} \log_{24} \left(2\sqrt[3]{3}\right)$

277. $\log_{32} \log_{324} \left(3\sqrt[4]{4}\right)$

278. $\log_{2,25} \log_{18} \left(54\sqrt{2}\right)$

279. $\log_{0,8} \log_{144} \left(288\sqrt{3}\right)$

$\boxed{^{\text{x}}280}$ $\log_4 3 \cdot \log_3 \sqrt[5]{2}$

281. $\log_{81} 5 \cdot \log_5 \sqrt[8]{3}$

282. $\log_2 100 \cdot \lg 32$

283. $\log_7 121 \cdot \log_{11} 343$

284. $\left(\log_{11} 88 - 1\right) \cdot \left(1 - \log_8 88\right)$

285. $\left(\log_7 63 - 1\right) \cdot \left(1 - \log_3 147\right)$

286. $\log_{49} 8 \cdot \log_2 5 \cdot \log_{25} 7$

287. $\log_9 10 \cdot \log_8 729 \cdot \lg 128$

$\boxed{^{\text{x}}288}$ $\log_a \left(a^5 b^6\right)$, если $\log_b a = \dfrac{1}{7}$

289. $\log_a \dfrac{a^3}{b^4}$, если $\log_b a = 0{,}2$

290. $\log_a \dfrac{b^{29}}{a^{90}}$, если $\log_b a = 290$

291. $\log_b \left(a^9 b^3\right)$, если $\log_a \sqrt{b} = 0{,}3$

292. $\log_b \left(\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[4]{b}\right)$, если $\log_b \sqrt[9]{a} = 4$

293. $\log_{a^4} \left(\sqrt[5]{a^6} \cdot \sqrt[8]{b^7}\right)$, если $\log_{\sqrt{b}} a^3 = 0{,}1$

294. $\log_a \sqrt{a\sqrt[6]{b}}$, если $a^9 - b^5 = 0$

295. $\log_a \dfrac{\sqrt[5]{a^2 b}}{\sqrt[10]{\sqrt{a}\, b^3}}$, если $a^{13} - b^{10} = 0$

$\boxed{^{\text{o}}296}$ $\dfrac{\log_3 15}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 45}{\log_5 3}$

297. $\dfrac{\log_7 567}{\log_{81} 7} - \dfrac{\log_7 63}{\log_{63} 7}$

298. $\dfrac{\log_2 192}{\log_3 2} - \dfrac{\log_2 24}{\log_{24} 2}$

299. $\dfrac{\log_2 800}{\log_{800} 2} - \dfrac{\log_2 625}{\log_{160} 2}$

300. $\dfrac{\log_2 1{,}6}{\lg 2} + \dfrac{\log_2 0{,}4}{\log_{0,4} 2}$

301. $\dfrac{\log_3 2{,}7}{\log_{2,7} 3} + \dfrac{\log_3 72{,}9}{\lg 3}$

302. $\lg^2 200 \cdot \log_2 10 - \dfrac{\left(\lg 2 - 2\right)^2}{\lg 2}$

303. $\log_2^2 96 \cdot \log_{12} 2 - \dfrac{\left(\log_2 12 - 3\right)^2}{\log_2 12}$

Работа с формулами

$\boxed{304}$ Заработная плата сотрудника страховой компании (в руб.) рассчитывается по формуле: $C = 8000 + 550 \cdot n$, где n – количество заключённых договоров страхования за текущий месяц. Определите, сколько договоров заключил за месяц сотрудник, если его зарплата за этот месяц составила 34400 рублей.

305. В одной из компаний заработная плата менеджера (в руб.) рассчитывается по формуле: $C = 15000 + 0{,}02 \cdot n$, где n – сумма (в руб.), оплаченная по договорам клиентами фирмы в текущем месяце. Определите, какую сумму (в руб.) оплатили по договорам клиенты фирмы в текущем месяце, если зарплата менеджера за этот месяц составила 39900 рублей.

306. Перевод температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия осуществляется по формуле: $C = \frac{5}{9} \cdot \big(F - 32\big)$, где F – градусы Фаренгейта, C – градусы Цельсия. Газетная бумага воспламеняется при температуре 451° по шкале Цельсия. При какой температуре по шкале Фаренгейта воспламеняется бумага?

307. Перевод температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта осуществляется по формуле: $F = 1{,}8C + 32$, где C – градусы Цельсия, F – градусы Фаренгейта. Температура плавления свинца составляет $621{,}5^\circ$ по шкале Фаренгейта. При какой температуре по шкале Цельсия плавится свинец?

$\boxed{308}$ По теореме синусов $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B}$, где a и b – длины сторон треугольника, противолежащих углам A и B. Найдите синус угла A, если $a = 18,\ b = 108,\ \sin\angle B = 0{,}3$.

309. Для отношения площади S сектора круга радиуса R к длине дуги L этого сектора выполнено равенство: $\frac{S}{L} = \frac{R}{2}$. Найдите длину дуги L сектора круга радиусом 30, если его площадь равна 39.

310. Для площади треугольника имеет место формула: $S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности треугольника, a, b, c – длины его сторон. Пользуясь этой формулой, найдите радиус описанной окружности треугольника, если известны его площадь и длины сторон: $S = 36,\ a = 17,\ b = 10,\ c = 9$.

311. Для площади треугольника имеет место формула: $S = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2}$, где r – радиус вписанной окружности треугольника, a, b, c – длины его сторон. Пользуясь этой формулой, найдите радиус вписанной окружности треугольника, если известны его площадь и длины сторон: $S = 60,\ a = 8,\ b = 15,\ c = 17$.

$\boxed{^{x}312}$ Число диагоналей (k) любого многоугольника можно найти по формуле: $k = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$, где n – число вершин многоугольника. Используя эту формулу, найдите число вершин многоугольника, который имеет ровно 350 диагоналей.

313. Если на плоскости проведено n прямых общего положения (т.е. никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны друг другу), то число частей (k), на которые они разбивают плоскость, можно подсчитать по формуле: $k = \frac{n \cdot (n + 1) + 2}{2}$. Используя эту формулу, определите, сколько прямых общего положения проведено на плоскости, если они разбили её на 497 частей.

$\boxed{^{x}314}$ Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле: $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$ Вычислите площадь круга радиуса $R = 4\sqrt{5}$, округлив ответ до сотых.

315. Площадь поверхности шара радиуса R вычисляется по формуле: $S = 4\pi R^2$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$ Вычислите площадь поверхности шара радиуса $R = 5\sqrt{3}$, округлив ответ до сотых.

316. Объём шара радиуса R вычисляется по формуле: $S = \frac{4}{3}\pi R^3$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$ Вычислите объём шара радиуса $R = 1{,}5$, округлив ответ до сотых.

$\boxed{^{x}317}$ Цилиндрическая бочка с радиусом основания $0{,}5$ м и высотой 2 м заполнена целиком квасом, цена которого 50 руб. за 1 литр. Найдите стоимость всего кваса, содержащегося в бочке, округлив результат до целого числа рублей. При вычислении используйте формулу объёма цилиндра: $V = \pi r^2 \cdot h$, где r – радиус основания цилиндра, h – его высота. Справочно: $\pi = 3{,}141592\ldots$, $1\,\text{м}^3 = 1000$ литров.

318. Цилиндрическая ёмкость для хранения горючего с радиусом основания 5 м и высотой 12 м заполнена целиком бензином, цена которого 40 руб. за 1 литр. Найдите стоимость всего бензина, содержащегося в этой ёмкости. В ответе укажите число тыс. руб., округлив его до целого числа. При вычислении используйте формулу объёма цилиндра: $V = \pi r^2 \cdot h$, где r – радиус основания цилиндра, h – его высота. Справочно: $1\,\text{м}^3 = 1000$ л, $\pi = 3{,}141592...$

$\boxed{^{\text{x}}319}$ Длина медианы m_c, проведённой к стороне c треугольника со сторонами a, b, c, вычисляется по формуле: $m_c = \dfrac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$. Найдите сторону c, если известно, что $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{19}$, а $m_c = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

320. Длина биссектрисы l_c, проведённой к стороне c треугольника со сторонами a, b, c, вычисляется по формуле: $l_c = \dfrac{1}{a+b}\sqrt{ab\big((a+b)^2-c^2\big)}$. Найдите сторону c, если известно, что $a=3$, $b=5$, а $l_c=\dfrac{15}{8}$.

321. Среднее квадратичное трёх чисел a, b и c вычисляется по формуле: $s=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Найдите число c, если известно, что среднее квадратичное числа c и чисел $a=3$, $b=21$, равно 15.

$\boxed{^{\text{o}}322}$ Если натуральное число n представимо в виде $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, ..., p_k$ – различные простые числа, то сумма всех натуральных делителей числа n равна $(p_1+1)\cdot(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_k+1)$. Используя это, найдите сумму всех натуральных делителей следующих чисел:

а) 455; б) 222; в) 322; г) 3210.

323. Через $d(n)$ будем обозначать число всех натуральных делителей числа n. Если $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n на простые множители (т.е. $p_1, p_2, ..., p_k$ – различные простые числа, а степени $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – натуральные числа), то для числа всех натуральных делителей n имеет место формула: $d(n) = (\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$. Используя эту формулу, найдите число всех натуральных делителей чисел:

а) 33000; б) 324; в) 504; г) 7776.

Решения

Номера задач, к которым приведены решения: **48, 53, 87, 103, 151, 158, 165, 223, 278, 287, 294, 303, 317, 322.**

Напомним, что в заданиях с №1 по №303 требуется найти значение предложенного выражения.

48. $6a-15b+10$, если $\dfrac{2a-3b}{a-b+2}=\dfrac{4}{3}$

Решение. Способ 1

Из равенства $\dfrac{2a-3b}{a-b+2}=\dfrac{4}{3}$ по правилу пропорции имеем: $(2a-3b)\cdot 3 = 4\cdot(a-b+2)$, $6a-9b=4a-4b+8$, $2a-5b=8$. Отсюда получаем: $6a-15b+10 = 3\cdot(2a-5b)+10 = 3\cdot 8+10 = 34$.

Примечание. Заметим, что данное в условии равенство не определяет числа a и b однозначным образом – подставляя в равенство $2a=5b+8$ вместо b произвольное число, мы получим пару чисел a и b, для которой данное в условии равенство выполнено. Но ответ в задании не должен зависеть от выбора числа b. Чтобы ответ в задаче вычислялся однозначно, коэффициенты должны быть подобраны специальным образом. И это ответственность составителя задачи, а не ученика! Поэтому при решении подобной задачи на экзамене в целях экономии времени вполне допустим следующий способ вычисления правильного ответа.

Способ 2

Подставляя в равенство $\dfrac{2a-3b}{a-b+2}=\dfrac{4}{3}$ значение $b=0$, получаем: $\dfrac{2a}{a+2}=\dfrac{4}{3}$, $6a=4(a+2)$, $a=4$. Подставляя в выражение $6a-15b+10$ значения $a=4, b=0$, получаем ответ: $6\cdot 4+10=34$.

Ответ: 34

53. $x+2y-3z$, если $4x+y=6$, $12z-7y=20$

Решение. Способ 1

Если из равенства $4x+y=6$ вычесть равенство $12z-7y=20$, то получим равенство $4x+8y-12z=-14$, левая часть которого отличается от выражения, значение которого требуется найти, лишь множителем 4. Отсюда находим: $x+2y-3z=\dfrac{1}{4}\cdot(-14)=-3{,}5$.

Примечание. Так как в условии даны два равенства, связывающие значения трёх переменных, то значения x, y, z, не определяются из условия задачи однозначным образом. Значение любой из переменных x, y, z можно принять равным любому числу (после чего две оставшиеся переменные будут определяться однозначно). Но ответ не должен зависеть от произвольности выбора значений одной из переменных. И это опять же ответственность составителя задачи! Поэтому, как и в предыдущем примере, на экзамене допустимо вычисление ответа по упрощённой схеме.

Способ 2

Полагая в равенствах $4x+y=6$ и $12z-7y=20$ число y равным нулю, имеем: $4x=6$, $12z=20$, откуда $x=1{,}5$ $z=\frac{5}{3}$. Подставляя в выражение $x+2y-3z$ значения $x=1{,}5$, $y=0$, $z=\frac{5}{3}$, получаем ответ: $1{,}5-3\cdot\frac{5}{3}=-3{,}5$.

Ответ: $-3{,}5$

87. $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[15]{64}$

Решение.

$$\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[15]{64}=8^{\frac{1}{5}}\cdot 64^{\frac{1}{15}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(2^6\right)^{\frac{1}{15}}=2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{6}{15}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}=2.$$

Ответ: 2

103. $\sqrt{30+5\sqrt{20}}+\sqrt{30-5\sqrt{20}}$

Решение.

Заметим, что $30+5\sqrt{20}=25+5\cdot 2\sqrt{5}+5=\left(5+\sqrt{5}\right)^2$ и, аналогично, $30-5\sqrt{20}=\left(5-\sqrt{5}\right)^2$. Отсюда имеем: $\sqrt{30+5\sqrt{20}}+\sqrt{30-5\sqrt{20}}=$ $=\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}=5+\sqrt{5}+5-\sqrt{5}=10.$

Ответ: 10

151. $\dfrac{\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt[10]{b}}{b^{\frac{15}{4}}}$, если $b^{13}=16$

Решение.

Преобразуем данное в условии выражение следующим образом: $b^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{1}{10}}\cdot b^{-\frac{15}{4}}=b^{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}-\frac{15}{4}}=b^{-\frac{13}{4}}$. Так как $b^{13}=16$, то $b^{-\frac{13}{4}}=16^{-\frac{1}{4}}=$ $=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5

158. $\dfrac{\left(\sqrt{22}\right)^{n+3}}{\left(\sqrt{11}\right)^{n-1}}$, если $2^{n+3}=9$

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{22}\right)^{n+3}}{\left(\sqrt{11}\right)^{n-1}}=\left(\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}}\right)^{n-1}\cdot\left(\sqrt{22}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\cdot 22^2=\sqrt{2^{n-1}}\cdot 22^2.$$

Так как $2^{n+3}=9$, то $2^{n-1}=\frac{9}{2^4}$. Поэтому $\sqrt{2^{n-1}}\cdot 22^2=\frac{3}{2^2}\cdot 22^2=$ $=3\cdot 11^2=363$.

Ответ: 363

165. $\dfrac{\left(\sqrt{12}\right)^n\cdot\left(\sqrt{14}\right)^n}{2^{n+2}\cdot 42^n}$ при $n=-6$

Решение.

Преобразуем данное в условии выражение следующим образом: $\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\right)^n\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\right)^n}{2^2\cdot 2^n\cdot 42^n}=\dfrac{2^n\cdot\left(\sqrt{42}\right)^n}{4\cdot 2^n\cdot 42^n}=\dfrac{1}{4\cdot\left(\sqrt{42}\right)^n}$. Подставляя в полученное выражение $n=-6$, имеем: $\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{42}\right)^6=\frac{1}{4}\cdot 42^3=21^2\cdot 42=$ $=18522$.

Ответ: 18522

223. $\sin 2\alpha$, если $\dfrac{5\sin\alpha-6\cos\alpha}{6\sin\alpha-10\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

Решение.

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{5\sin\alpha-6\cos\alpha}{6\sin\alpha-10\cos\alpha}$, отсюда по правилу пропорции имеем: $\sin\alpha\cdot(6\sin\alpha-10\cos\alpha)=\cos\alpha\cdot(5\sin\alpha-6\cos\alpha)$. Раскрывая скобки и преобразовывая полученное равенство, находим: $6\sin^2\alpha-10\sin\alpha\cos\alpha=5\sin\alpha\cos\alpha-6\cos^2\alpha$, $15\sin\alpha\cos\alpha=$ $=6\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha=6$. Отсюда находим, что значение искомого выражения равно $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{6}{15}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Ответ: 0,8

278. $\log_{2,25}\log_{18}\left(54\sqrt{2}\right)$

Решение.

Заметим, что $54\sqrt{2}=18\cdot 3\sqrt{2}=18\sqrt{18}$. Поэтому $\log_{18}\left(54\sqrt{2}\right)=$ $=\log_{18}\left(18^{\frac{3}{2}}\right)=1{,}5$. Далее имеем: $2{,}25=1{,}5^2$, $\log_{2,25}\log_{18}\left(54\sqrt{2}\right)=$

$= \log_{2,25} 1{,}5 = \log_{1{,}5^2} 1{,}5 = \frac{1}{2}\log_{1{,}5} 1{,}5 = 0{,}5.$

Ответ: 0,5

287. $\log_9 10 \cdot \log_8 729 \cdot \lg 128$

Решение.

Так как $8 = 2^3$, $729 = 9^3$, то $\log_8 729 = \log_{2^3} 9^3 = \log_2 9$. Далее, $128 = 2^7$, $\lg 128 = \lg 2^7 = 7\lg 2$. Поэтому данное в условии выражение преобразуется следующим образом: $\log_9 10 \cdot \log_2 9 \cdot 7\lg 2 =$

$$= \frac{7\log_9 10}{\log_9 2} \cdot \lg 2 = 7\log_2 10 \cdot \lg 2 = \frac{7\log_2 10}{\log_2 10} = 7.$$

Ответ: 7

294. $\log_a \sqrt{a\sqrt[6]{b}}$, если $a^9 - b^5 = 0$

Решение.

$\sqrt{a\sqrt[6]{b}} = \left(a \cdot b^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{12}}$. По условию имеем: $a^9 = b^5$, $b = a^{\frac{9}{5}}$.

Отсюда получаем: $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{9}{5}}\right)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{20}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{20}} = a^{\frac{13}{20}}$.

Итак, $\log_a \sqrt{a\sqrt[6]{b}} = \log_a\left(a^{\frac{13}{20}}\right) = \frac{13}{20} = 0{,}65.$

Ответ: 0,65

303. $\log_2^2 96 \cdot \log_{12} 2 - \dfrac{(\log_2 12 - 3)^2}{\log_2 12}$

Решение.

Так как $\log_2 12 - 3 = \log_2 12 - \log_2 8 = \log_2 \frac{3}{2}$, то данное в условии выражение преобразуется следующим образом:

$$\log_2^2 96 \cdot \frac{1}{\log_2 12} - \frac{\log_2^2 1{,}5}{\log_2 12} = \frac{\log_2^2 96 - \log_2^2 1{,}5}{\log_2 12} =$$

$$= \frac{(\log_2 96 - \log_2 1{,}5)\cdot(\log_2 96 + \log_2 1{,}5)}{\log_2 12} = \frac{\log_2 64 \cdot \log_2 144}{\log_2 12} =$$

$$= \frac{\log_2 2^6 \cdot \log_2 12^2}{\log_2 12} = \frac{6 \cdot 2 \cdot \log_2 12}{\log_2 12} = 12.$$

Ответ: 12

317. Цилиндрическая бочка с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена целиком квасом, цена которого 50 руб. за 1 литр. Найдите стоимость всего кваса, содержащегося в бочке, округлив результат до целого числа рублей. При вычислении используйте формулу объёма цилиндра: $V = \pi r^2 \cdot h$, где r — радиус основания цилиндра, h — его высота. Справочно: $\pi = 3{,}141592...$, $1\text{ м}^3 = 1000$ литров.

Решение.

Для объёма бочки, выраженного в м^3, имеем: $V = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 2 = \pi \cdot 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5\pi$. А переводя в литры, получаем: $V = 500\pi$ литров. Стоимость всего кваса, содержащегося в бочке, равна $500\pi \cdot 50$ руб. $= 25000\pi$ руб. Так как $\pi < 3{,}1416$, то $25000\pi < 25 \cdot 3141{,}6 = 78540$. А поскольку $\pi > 3{,}14159$, то $25000\pi > 25 \cdot 3141{,}59 = 78539{,}75$. Итак, $78539{,}75 < 25000\pi < 78540$, поэтому округляя до целого числа получим, что стоимость всего кваса в бочке равна 78540 рублей.

322. Если натуральное число n представимо в виде $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, то сумма всех натуральных делителей числа n равна $(p_1 + 1)\cdot(p_2 + 1)\cdot \ldots \cdot(p_k + 1)$. Используя это, найдите сумму всех натуральных делителей следующих чисел:

а) 455; б) 222; в) 322; г) 3210.

Решение.

Разложим числа 455, 222, 322 и 3210 на простые множители: $455 = 5 \cdot 91 = 5 \cdot 7 \cdot 13$, $222 = 2 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 37$, $322 = 2 \cdot 161 = 2 \cdot 7 \cdot 23$, $3210 = 321 \cdot 10 = 3 \cdot 107 \cdot 2 \cdot 5$. Применяя указанную в условии формулу, получаем, что суммы всех натуральных делителей чисел 455, 222, 322 и 3210 равны соответственно $6 \cdot 8 \cdot 14 = 672$, $3 \cdot 4 \cdot 38 = 456$, $3 \cdot 8 \cdot 24 = 576$ и $4 \cdot 108 \cdot 3 \cdot 6 = 7776$.

Ответ: а) 672; б) 456; в) 576; г) 7776.

Указание к задаче №323.

Разложим числа 33000, 324, 504 и 7776 на простые множители:

$$33000 = 33 \cdot 10^3 = 3 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3;$$

$$324 = 4 \cdot 81 = 2^2 \cdot 9^2 = 2^2 \cdot 3^4;$$

$$504 = 4 \cdot 126 = 4 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 7 \cdot 3^2;$$

$$7776 = 6 \cdot 1296 = 6 \cdot 6 \cdot 216 = 6^2 \cdot 6 \cdot 36 = 6^5 = 2^5 \cdot 3^5.$$

Далее остаётся лишь применить данную в условии формулу.

Контрольные работы.

Работа №1. Рациональные выражения, корень, степень

Рекомендуемое время для выполнения работы 45 минут.

Рекомендуемая шкала оценивания результатов

число верных ответов	0-2	3	4-5	6-7
школьная оценка	2	3	4	5

Вариант 1

1. $\left(\frac{1}{3}+5\frac{7}{9}\right)\cdot 13{,}5$

2. $10a-2b+8$, если $\frac{a+3b+1}{3a+b-1}=2$

3. $\sqrt[3]{14-\sqrt{115}}\cdot\sqrt[3]{14+\sqrt{115}}\cdot\sqrt[3]{243}$

4. $\frac{\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{0{,}375}}{\sqrt{20}}$

5. $9^6\cdot 6^5:54^4$

6. $\frac{5^{8{,}5}}{125^{3{,}5}}$

7. $\frac{m^{\frac{2}{5}}\cdot m^{\frac{3}{7}}}{m^{\frac{8}{35}}}$ при $m=32$

Вариант 2

1. $\left(\frac{2}{7}+1\frac{5}{6}\right)\cdot 10{,}5$

2. $10a-4b+5$, если $\frac{7a-6b+5}{3a-2b-1}=4$

3. $\sqrt[6]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[6]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[6]{128}$

4. $\frac{\sqrt{0{,}15}\cdot\sqrt{13{,}5}}{\sqrt{10}}$

5. $6^7\cdot 8^5:48^6$

6. $\frac{27^{2{,}3}}{3^{3{,}9}}$

7. $\frac{m^{\frac{2}{3}}\cdot m^{\frac{13}{14}}}{m^{\frac{2}{21}}}$ при $m=49$

Вариант 3

1. $\left(\frac{1}{11}+2\frac{1}{5}\right)\cdot 5{,}5$

2. $12{,}5a+5b+21$, если $\frac{4a+3b}{3a+4b+1}=0{,}5$

3. $\sqrt[3]{0{,}1-\sqrt{0{,}001}}\cdot\sqrt[3]{0{,}1+\sqrt{0{,}001}}\cdot\sqrt[3]{3}$

4. $\frac{\sqrt{1{,}4}\cdot\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}18}}$

5. $0{,}1^2\cdot 0{,}2^3:0{,}5^4$

6. $\left(0{,}064^{\frac{1}{6}}\cdot 0{,}4^{-3{,}5}\right)^{-\frac{2}{3}}$

7. $\frac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{a^{18}}$ если $a^{70}=625$

Вариант 4

1. $\left(\frac{1}{2}+3\frac{5}{7}\right)\cdot 12{,}6$

2. $a+2{,}5b+12$, если $\frac{0{,}2a+0{,}3b-44}{0{,}4a+0{,}5b+90}=0{,}4$

3. $\sqrt[4]{0{,}5-\sqrt{0{,}2}}\cdot\sqrt[4]{0{,}5+\sqrt{0{,}2}}\cdot\sqrt[4]{1{,}25}$

4. $\frac{\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{3{,}3}}{\sqrt{0{,}44}}$

5. $0{,}2^{11}\cdot 0{,}3^{14}:0{,}06^{12}$

6. $\left(0{,}125^{-\frac{1}{12}}\cdot 0{,}5^{9{,}25}\right)^{\frac{1}{3}}$

7. $\frac{\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[20]{a}}{a^{25}}$ если $a^{99}=256$

Вариант 5

1. $\dfrac{28}{0{,}3}\cdot\dfrac{1{,}5}{0{,}56}$

2. $\dfrac{4}{a^3b-ab^3}:\dfrac{2}{ab^5-a^5b}$ при $a=0{,}2,\ b=0{,}3$

3. $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{5\frac{1}{4}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$

4. $0{,}5\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[12]{125}$

5. $\left(7\cdot 2^{-5}\right)\cdot\left(8\cdot 5^{-3}\right)$

6. $3^{\frac{2}{11}}\cdot 4^{\frac{4}{11}}\cdot 48^{\frac{9}{11}}$

7. $\dfrac{18^{n-1}}{3^{n+1}}$, если $6^n=81$

Вариант 6

1. $\dfrac{0{,}36}{47}\cdot\dfrac{9{,}4}{0{,}09}$

2. $\dfrac{1}{a^2b+ab^2}:\dfrac{5}{a^2b^4-a^4b^2}$ при $a=0{,}1,\ b=0{,}9$

3. $\left(\sqrt{4\frac{1}{5}}-\sqrt{11\frac{2}{3}}\right):\sqrt{\frac{7}{60}}$

4. $12\cdot\sqrt[3]{121}\cdot\sqrt[6]{121}$

5. $\left(3\cdot 2^{-6}\right)\cdot\left(6\cdot 5^{-4}\right)$

6. $0{,}4^{\frac{3}{7}}\cdot 5^{\frac{6}{7}}\cdot 10^{\frac{4}{7}}$

7. $\dfrac{12^{n+1}}{4^{n-2}}$, если $3^n=15$

Вариант 7

1. $\dfrac{0{,}28}{4{,}9}\cdot\dfrac{0{,}77}{44}$

2. $\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-4x}$ при $x=0{,}003$

3. $\left(\sqrt{\frac{6}{7}}-\sqrt{10\frac{1}{2}}\right):\sqrt{\frac{3}{56}}$

4. $\sqrt[5]{81}\cdot\sqrt[10]{9}$

5. $\left(5\cdot 2^{-5}\right)\cdot\left(24\cdot 25^{-3}\right)$

6. $0{,}7^{0{,}3}\cdot 49^{0{,}35}\cdot 10^{1{,}3}$

7. $\dfrac{\left(\sqrt{30}\right)^{n+2}}{\left(\sqrt{6}\right)^{n-4}}$ если $5^n=64$

Вариант 8

1. $\dfrac{0{,}35}{45}\cdot\dfrac{5{,}4}{84}$

2. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+3x}$ при $x=0{,}02$

3. $\left(\sqrt{27\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{2}{5}}\right):\sqrt{\frac{11}{90}}$

4. $\sqrt[3]{32}\cdot\sqrt[9]{8}$

5. $\left(9\cdot 4^{-3}\right)\cdot\left(44\cdot 5^{-5}\right)$

6. $0{,}2^{0{,}1}\cdot 0{,}08^{0{,}3}\cdot 10^{-1{,}3}$

7. $\dfrac{\left(\sqrt{78}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{13}\right)^{n-3}}$ если $6^n=54$

Вариант 9

1. $\left(1\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(2\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\right)$

2. $\dfrac{x^4-6x^2-16}{x^2+2}$ при $x=0{,}8$

3. $\sqrt{22+12\sqrt{2}}+\sqrt{99-54\sqrt{2}}$

4. $16 \cdot \sqrt[4]{0{,}081} \cdot \sqrt[8]{0{,}01}$

5. $8^4 \cdot 9^5 : 12^6$

6. $0{,}15^{\frac{1}{5}} \cdot 9^{\frac{2}{5}} \cdot 20^{\frac{11}{5}}$

7. $\dfrac{\left(\sqrt{22}\right)^n \cdot \left(\sqrt{55}\right)^n}{11^{n-2} \cdot 10^{n+2}}$ при $n = -8$

Вариант 10

1. $\left(1\frac{2}{5} + \frac{4}{7}\right) \cdot \left(2\frac{1}{3} - \frac{7}{8}\right)$

2. $\dfrac{x^8 + x^4 - 72}{x^4 - 8}$ при $x = 0{,}9$

3. $\sqrt{36 - 16\sqrt{5}} - \sqrt{45 + 20\sqrt{5}}$

4. $20 \cdot \sqrt[5]{0{,}0001} \cdot \sqrt[20]{0{,}0001}$

5. $4^5 \cdot 6^4 : 480^3$

6. $0{,}6^{\frac{1}{7}} \cdot 27^{\frac{2}{7}} \cdot 25^{\frac{4}{7}}$

7. $\dfrac{\left(\sqrt{15}\right)^n \cdot \left(\sqrt{21}\right)^n}{3^{n-3} \cdot 35^{n+5}}$ при $n = -12$

Работа №2. Тригонометрические выражения

Рекомендуемое время для выполнения работы 40 минут.

Рекомендуемая шкала оценивания результатов

число верных ответов	0-1	2	3	4-5
школьная оценка	2	3	4	5

Вариант 1

1. $11 - 99\cos^2 x$, если $\sin^2 x = 0{,}9$

2. $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$

3. $\sqrt{32} \cdot \sin\dfrac{33\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{34\pi}{3}$

4. $\dfrac{1 - 2\cos^2 111^\circ}{10\cos^2 114^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ}$

5. $\sqrt{6} \cdot \dfrac{\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \sin 110^\circ \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ \sin 35^\circ - \sin 100^\circ \cos 35^\circ}$

Вариант 2

1. $13 - 12\sin^2 x$, если $\cos^2 x = 0{,}11$

2. $\dfrac{\sqrt{17}}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -4$ и $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$

3. $\sqrt{6} \cdot \sin\dfrac{63\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{64\pi}{3}$

4. $\dfrac{1 - 2\sin^2 54^\circ}{8\operatorname{tg} 9^\circ \cdot \sin^2 99^\circ}$

5. $\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sin 40^\circ \cos 5^\circ - \sin 230^\circ \sin 5^\circ}{\sin 25^\circ \sin 35^\circ - \sin 115^\circ \cos 35^\circ}$

Вариант 3

1. $2 - 3\cos^2 x$, если $\sin x = -0{,}4$

2. $\sqrt{13} \cdot \sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$ и $\alpha \in (2\pi; 3\pi)$

3. $\operatorname{ctg}\dfrac{43\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{43\pi}{3} \cdot \sin\dfrac{43\pi}{6}$

4. $\dfrac{\sin^2 1135^\circ - \sin^2 35^\circ}{\sin 350^\circ \cdot \cos 370^\circ}$

5. $\dfrac{\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \sin 160^\circ \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ \sin 80^\circ + \sin 110^\circ \cos 80^\circ}$

Вариант 4

1. $4\sin^2 x - 3$, если $\cos x = 0{,}2$
2. $\sqrt{53}\cdot\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 3{,}5$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$
3. $\operatorname{tg}\frac{57\pi}{4}\cdot\sin\frac{59\pi}{6}\cdot\cos\frac{61\pi}{3}$
4. $\dfrac{\cos^2 200^\circ - \cos^2 1010^\circ}{\cos 565^\circ\cdot\cos 605^\circ}$
5. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sin 35^\circ\sin 80^\circ + \sin 125^\circ\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ\cos 20^\circ - \cos 170^\circ\sin 20^\circ}$

Вариант 5

1. $54\operatorname{ctg}^2 x$, если $\sin x = 0{,}3$
2. $\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\alpha\in(\pi;2\pi)$
3. $\operatorname{tg}240^\circ\cdot\sin 480^\circ\cdot\cos 960^\circ$
4. $\dfrac{\sin 560^\circ}{\sin 400^\circ\cos 800^\circ\sin 770^\circ}$
5. $\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 75^\circ\cos 15^\circ - \sin 165^\circ\sin 15^\circ}{\sin 35^\circ\sin 205^\circ + \sin 305^\circ\cos 205^\circ}$

Вариант 6

1. $8\operatorname{ctg}^2 x + 7$, если $\cos x = -0{,}6$
2. $\sqrt{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$
3. $\operatorname{tg}300^\circ\cdot\sin 600^\circ\cdot\cos 900^\circ$
4. $\dfrac{\cos 670^\circ}{\cos 755^\circ\cos 775^\circ\cos 650^\circ}$
5. $\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sin 10^\circ\cos 55^\circ + \sin 280^\circ\sin 55^\circ}{\sin 10^\circ\cos 110^\circ + \sin 260^\circ\cos 200^\circ}$

Вариант 7

1. $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $10\sin^2\alpha + 71\cos^2\alpha = 35$
2. $\dfrac{\sqrt{6}}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha\in(\pi;2\pi)$
3. $\operatorname{ctg}300^\circ\cdot\cos 600^\circ\cdot\sin 1200^\circ$
4. $\left(\sin^4\frac{35\pi}{24} - \sin^4\frac{25\pi}{24}\right)\cdot\sin\frac{25\pi}{12}\cdot\sin\frac{25\pi}{6}$
5. $\dfrac{\sin 5^\circ\cos 25^\circ + \sin 95^\circ\sin 25^\circ}{\sin 15^\circ\cos 105^\circ - \sin 105^\circ\sin 75^\circ}$

Вариант 8

1. $\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $88\sin^2\alpha - 90\cos^2\alpha = 10$
2. $\sqrt{30}\cdot\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$
3. $\operatorname{tg}600^\circ\cdot\sin 1200^\circ\cdot\cos 2400^\circ$
4. $\left(\cos^2\frac{23\pi}{16} - \cos^2\frac{33\pi}{16}\right)\cdot\sin\frac{33\pi}{8}\cdot\sin\frac{33\pi}{4}$
5. $\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sin 25^\circ\cos 85^\circ + \sin 245^\circ\sin 85^\circ}{\sin 20^\circ\sin 65^\circ - \sin 290^\circ\cos 65^\circ}$

Вариант 9

1. $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$
2. $\sqrt{6}\cdot\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}2$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right)$
3. $\operatorname{tg}690^\circ\cdot\cos 1200^\circ\cdot\sin 1500^\circ$
4. $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}$
5. $\operatorname{tg}210^\circ\cdot\dfrac{\sin 10^\circ\cos 410^\circ - \sin 1700^\circ\sin 50^\circ}{\sin 20^\circ\sin 400^\circ + \sin 70^\circ\cos 500^\circ}$

Вариант 10

1. $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$
2. $\sqrt{21}\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}4$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$
3. $\operatorname{ctg} 1020^\circ \cdot \cos 1230^\circ \cdot \cos 2340^\circ$
4. $\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}$
5. $\operatorname{ctg} 1110^\circ \cdot \dfrac{\sin 1100^\circ \sin 50^\circ + \sin 1150^\circ \sin 400^\circ}{\sin 110^\circ \sin 10^\circ - \sin 200^\circ \sin 2240^\circ}$

Работа №3. Логарифмические выражения

Рекомендуемое время для выполнения работы 35 минут.

Рекомендуемая шкала оценивания результатов

число верных ответов	0-1	2	3	4-5
школьная оценка	2	3	4	5

Вариант 1

1. $\log_2 12{,}8 - \log_2 0{,}8$
2. $36^{\log_6 0{,}3}$
3. $\log_{100}\sqrt[4]{0{,}1}$
4. $\log_{0{,}2}\log_2 32$
5. $\log_a\left(a^{12}b^{13}\right)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$

Вариант 2

1. $\log_3 32{,}4 - \log_3 1{,}2$
2. $81^{\log_9 0{,}2}$

3. $\log_{49}\sqrt[6]{343}$
4. $\log_{0{,}5}\log_5 625$
5. $\log_a\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$, если $\log_b a = \frac{1}{6}$

Вариант 3

1. $\log_5 0{,}6 - \log_5 3$
2. $27^{\log_3 0{,}2}$
3. $\log_{0{,}5}\sqrt[5]{64}$
4. $\log_{81}\log_{\sqrt[9]{2}} 8$
5. $\log_b\left(a^6 b^{99}\right)$, если $\log_a\sqrt{b} = 0{,}6$

Вариант 4

1. $\log_{2{,}5} 25 - \log_{2{,}5} 4$
2. $8^{\log_2 0{,}4}$
3. $\log_{0{,}2}\sqrt[4]{125}$
4. $\log_4\log_{\sqrt[8]{3}} 81$
5. $\log_a\left(a^4 b^{32}\right)$, если $\log_b\sqrt{a} = 0{,}1$

Вариант 5

1. $\lg 0{,}0025 + \lg 0{,}004$
2. $49^{\log_{\sqrt{7}} 4}$
3. $\log_4\left(8\sqrt[4]{8}\right)$
4. $\log_9\log_{54}\left(3\sqrt[3]{2}\right)$

5. $\log_b\left(\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{b}\right)$, если $\log_b\sqrt[6]{a}=7$

Вариант 6

1. $\log_5 0{,}032+\log_5 1{,}25$
2. $4^{\log_{\sqrt{2}}6}$
3. $\log_{64}\left(8\sqrt[8]{8}\right)$
4. $\log_{0,4}\log_{343}\left(7\sqrt[5]{7}\right)$
5. $\log_b\left(\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[5]{b}\right)$, если $\log_b\sqrt[4]{a}=3$

Вариант 7

1. $\log_2 312{,}5+\log_2 0{,}0004$
2. $144^{\log_{\sqrt{12}}3}$
3. $\log_{16}\left(4\sqrt[4]{0{,}5}\right)$
4. $\log_{0,04}\log_{64}\left(2\sqrt[5]{2}\right)$
5. $\log_a\sqrt{a\sqrt[6]{b}}$, если $b^2-a^3=0$

Вариант 8

1. $\log_4 2{,}56+\log_4 6{,}25$
2. $169^{\log_{\sqrt{13}}2}$
3. $\log_{0,04}\left(5\sqrt[4]{0{,}2}\right)$
4. $\log_{2,5}\log_{27}\left(3\sqrt[5]{3}\right)$
5. $\log_a\sqrt{a^3\sqrt[8]{b}}$, если $b^5-a^4=0$

Вариант 9

1. $\log_6 54+\log_6 144$
2. $\left(2\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}}11}$
3. $\log_{0,05}\left(40\sqrt{5}\right)$
4. $\log_3 0{,}04\cdot\log_5 49\cdot\log_7 27$
5. $\lg^2 9000\cdot\log_3 10-\dfrac{\left(3-\lg 9\right)^2}{\lg 3}$

Вариант 10

1. $\log_{14} 56+\log_{14} 686$
2. $\left(9\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}6}$
3. $\log_{0,08}\left(2{,}5\sqrt{2}\right)$
4. $\log_3 32\cdot\log_2 25\cdot\log_{0,2} 3$
5. $\dfrac{\log_2^2 3}{\log_2 12}-\dfrac{\log_2 48\cdot\log_{12}2}{\log_{48}2}$

Раздел III. Задачи с практическим содержанием

Измерение величин является отправным пунктом всех применений математики.

Анри Лебег

§ 1. Вычислительные задачи

Числа и проценты

$\boxed{1}$ Почтовая марка стоит 2 руб. 40 копеек. Какое наибольшее число этих марок можно купить на 80 рублей?

2. Один метр ткани стоит 360 рублей. Какое наибольшее целое число метров ткани можно купить на 10000 рублей?

3. В рецепте приготовления маринованных огурцов на одну трёхлитровую банку требуется 90 г соли. На какое количество двухлитровых банок маринованных огурцов, приготовленных по этому рецепту, хватит упаковки соли весом 1 кг?

4. В рецепте приготовления маринованных помидоров на одну двухлитровую банку требуется 75 мл уксуса. На какое количество трёхлитровых банок маринованных помидоров, приготовленных по этому рецепту, хватит бутылки уксуса объёмом 2 л?

$\boxed{5}$ В общежитии института в каждой комнате можно поселить трёх человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 175 студентов?

6. В детском лагере отдыха в каждой комнате можно поселить четырёх человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 230 детей?

7. Теплоход рассчитан на 360 пассажиров и 30 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 45 человек. Какое наименьшее количество шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы при необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

§ 4. Теория вероятности

$\boxed{1}$ На 1000 электрических лампочек в среднем приходится 7 бракованных. Какова вероятность, что взятая наугад лампочка окажется исправна?

2. На 400 компакт-дисков в среднем приходится 6 бракованных. Какова вероятность, что взятый наугад компакт-диск окажется исправен?

3. Из 800 поступивших в продажу аккумуляторных батарей в среднем 780 батарей уже заряжены. Какова вероятность, что взятая наугад батарея будет не заряжена?

4. На экзамен по предмету «дискретная математика» вынесено 25 вопросов. Студент не выучил 7 из этих вопросов. Для получения положительной оценки студенту необходимо ответить на один вопрос, выбранный случайным образом. Найдите вероятность того, что студент получит положительную оценку.

$\boxed{5}$ В коробке с карандашами лежат 5 красных, 8 синих, 3 жёлтых и 9 зелёных карандашей. Какова вероятность, что взятый наугад карандаш окажется синим?

6. В коробке с новогодними украшениями лежат 12 красных, 11 зелёных, 9 жёлтых и 8 синих шаров. Какова вероятность, что взятый наугад шар окажется зелёным?

7. Новогодняя гирлянда состоит из 250 красных, 300 зелёных, 100 жёлтых и 150 синих лампочек. Одна из лампочек перегорела. Какова вероятность, что перегоревшая лампочка красного цвета?

8. В магазине на полке стоят CD-диски с фильмами, среди которых 385 комедийных фильмов, 110 триллеров, 160 фильмов в жанре «фантастика» и 95 мультипликационных фильмов. Какова вероятность, что взятый наугад диск будет содержать либо комедийный, либо мультипликационный фильм?

$\boxed{{}^{\text{x}}9}$ На фабрике керамической посуды 8% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 85% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка будет иметь дефект. Ответ округлите до тысячных.

10. На заводе по производству компакт-дисков 10% произведённых дисков имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 95% дефектных дисков. Остальные диски поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранный при покупке диск не имеет дефекта. Ответ округлите до тысячных.

х11 В одном из регионов производством постельного белья занимаются две фабрики. Первая фабрика выпускает 40% постельного белья, реализуемого в данном регионе, вторая — 60%. Среди комплектов постельного белья, произведённых первой фабрикой, дефекты пошива имеют 5% комплектов, у второй фабрики дефекты пошива имеют 9% комплектов. Найдите вероятность того, что случайно купленный в данном регионе комплект постельного белья имеет дефект.

12. В одном из городов услуги доступа в интернет предоставляют два провайдера. Первый провайдер обслуживает 45% подключений к сети интернет в данном городе, второй — 55%. Среди клиентов первого провайдера 85% полностью довольны качеством предоставляемых услуг (не имеют никаких претензий), среди клиентов второго провайдера полностью довольны качеством предоставляемых услуг 90% клиентов. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в данном городе пользователь сети интернет имеет какие-либо претензии к качеству предоставляемых услуг.

13 На чемпионате Европы по лёгкой атлетике в соревнованиях по прыжкам с шестом участвуют 30 спортсменов, среди которых три прыгуна из Белоруссии. Порядок прыжков определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что последним будет прыгать спортсмен из Белоруссии.

14. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 26 теннисистов, среди которых 4 участника из России. Найдите вероятность того, что в первом туре российский теннисист Пётр Степанов будет играть с другим теннисистом из России.

15. Научная конференция проводится в три дня. Всего запланировано 30 докладов: в первый день 12 докладов, а остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора А.Д. Александрова окажется запланированным на последний день конференции?

16. В конкурсе эстрадной песни «Евровидение» участвуют представители 40 стран, по одному исполнителю от каждой страны. Все выступления разбиваются жеребъёвкой на два полуфинала, по 20 выступлений в каждом. Порядок выступления в полуфинале также определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится во втором полуфинале и будет не ранее, чем 12 по счёту?

о17 В соревновании по синхронному плаванию участвуют команды 34 стран, в число которых входят Китай, Южная Корея и Япония. Порядок выступления команд определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что команда Южной Кореи будет выступать позже, чем команда Японии, но раньше, чем команда Китая? Ответ округлите до сотых.

18. В командном соревновании по художественной гимнастике участвуют команды 36 стран, в число которых входят Белоруссия, Казахстан, Китай и Россия. Порядок выступления команд определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что команда Китая начнёт выступление позже, чем команда России, но раньше, чем команды Белоруссии и Казахстана? Ответ округлите до тысячных.

х19 В таблице приведены результаты срезовой контрольной по алгебре в девятых классах школы. Какова вероятность того, что оценка выбранной наугад работы будет не выше, чем среднее по школе значение оценки?

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Число учащихся	4	19	23	4

20. В таблице приведены результаты срезовой контрольной по геометрии в девятых классах школы. Какова вероятность того, что оценка выбранной наугад работы будет выше, чем среднее по школе значение оценки?

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Число учащихся	5	27	15	3

х21 Оценки за контрольную по физике в 9-х классах школы распределились следующим образом: 9«А» класс — три «двойки», семь «троек», шесть «четвёрок», три «пятёрки»; 9«Б» класс — две «двойки», одиннадцать «троек», семь «четвёрок», одна «пятёрка». Какова вероятность того, что оценка выбранной наугад работы будет выше, чем в среднем по школе?

22. Оценки за контрольную по химии в 9 классах школы распределились следующим образом: 9«А» класс — три «двойки», десять «троек», семь «четвёрок» и две «пятёрки»; 9«Б» класс — две «двойки», шесть «троек», восемь «четвёрок» и две «пятёрки». Какова вероятность того, что оценка выбранной наугад работы будет не выше, чем в среднем по школе?

о23 Оценки за контрольную по геометрии в 9 классах школы представлены в таблице. Какова вероятность того, что оценка наугад выбранного учащегося 9«А» будет отличаться от средней по школе оценки не более, чем на 0,5 балла? Ответ округлите до сотых.

	9«А» класс				9«Б» класс			
Отметка	«2»	«3»	«4»	«5»	«2»	«3»	«4»	«5»
Число учащихся	4	13	8	2	3	10	11	2

24. Оценки за контрольную по алгебре в 9 классах школы представлены в таблице. Какова вероятность того, что оценка наугад выбранного учащегося 9«Б» будет отличаться от средней по школе оценки не более, чем на 0,5 балла? Ответ округлите до сотых.

	9«А» класс				9«Б» класс			
Отметка	«2»	«3»	«4»	«5»	«2»	«3»	«4»	«5»
Число учащихся	2	14	9	3	1	12	10	3

х25 Какое наибольшее число бракованных книг может допустить типография на тираж из 30000 книг, чтобы не нарушить стандарт отрасли, согласно которому вероятность того, что взятая наугад книга окажется бракованной, должна не превышать 0,02?

26. Пункт контроля качества бракует партию деталей в том случае, если вероятность того, что выбранная наугад деталь окажется бракованной, превышает 0,045. Какое наибольшее число бракованных деталей могло быть в партии из 1100 деталей, если она успешно прошла контроль?

27. Партия из 750 деталей оказалась забракована. Какое наименьшее число бракованных деталей могло быть в ней, если партия бракуется при том условии, что вероятность выбрать из неё бракованную деталь больше, чем 0,05?

х28 В коробке лежат 7 чёрных шаров. Какое наименьшее число белых шаров нужно положить в эту коробку, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки чёрный шар была не больше 0,3?

29. В коробке лежат 3 синих карандаша, 4 зелёных и 5 красных. Какое наибольшее число жёлтых карандашей можно положить в эту коробку, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки красный карандаш была не меньше 0,15?

30. В коробке лежат 10 белых и 30 чёрных шаров. Какое наибольшее число чёрных шаров можно вынуть из этой коробки, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки белый шар была не больше 0,6?

31. В коробке с новогодними украшениями лежат 15 красных, 3 зелёных 6 жёлтых и 9 лиловых шаров. Какое наименьшее число красных шаров нужно вынуть из этой коробки, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки лиловый шар была больше 0,4?

х32 Из слова «максимум» случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность, что будет выбрана буква, которая встречается в этом слове только один раз?

33. Из слова «математика» случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность, что будет выбрана буква, которая встречается в этом слове более одного раза?

34. Из слова «статистика» случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность, что будет выбрана буква, которая встречается в этом слове ровно два раза?

35. Из слова «аттестация» случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность, что будет выбрана буква, которая встречается в этом слове не менее двух раз?

о36 Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что извлечённый наугад кубик будет иметь хотя бы одну окрашенную грань.

37. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что извлечённый наугад кубик будет иметь не менее двух окрашенных граней.

38. Квадратный лист бумаги со стороной 10 см разбивают на 100 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от любой из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не менее 3 см?

39. Квадратный лист бумаги со стороной 10 см разбивают на 100 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не более 2 см?

$\boxed{^{x}40}$ На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков окажется равна 6. Ответ округлите до сотых.

41. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков окажется равна 10. Ответ округлите до сотых.

42. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков составит не больше 9. Ответ округлите до тысячных.

43. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков составит не меньше 4. Ответ округлите до тысячных.

$\boxed{^{x}44}$ Петя дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 5 очков.

45. Юля дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 6 очков.

46. Ваня дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 7 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало не меньше 4 очков.

47. Коля дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало не больше 3 очков.

В приведённых ниже задачах является общей следующая часть условия: "Монету подбрасывают несколько раз так, что каждый раз с равной вероятностью выпадает «орёл» или «решка»".

$\boxed{^{x}48}$ Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты «орёл» выпадет три раза.

49. Найдите вероятность того, что при первых трёх подбрасываниях выпадет одна и та же сторона монеты.

50. Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты и «орёл» и «решка» выпадут хотя бы по одному разу.

51. Найдите вероятность того, что при четырёх подбрасываниях монеты и «орёл» и «решка» выпадут хотя бы по одному разу.

52. Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты «решка» выпадет ровно два раза.

53. Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты «орёл» выпадет более одного раза.

$\boxed{^{x}54}$ Перед началом футбольного матча жребием определяется команда, которая получит право выбора ворот. Команда «Сатурн» по очереди играет с командами «Меркурий», «Марс», «Юпитер» и «Гелиос». Найдите вероятность того, что команда «Сатурн» получит право выбора ворот только в первых двух играх.

55. Перед началом волейбольного матча жребием определяется команда, которая будет первой осуществлять подачу. Команда «Рубин» по очереди играет с командами «Сапфир», «Изумруд», «Аметист» и «Топаз». Найдите вероятность того, что команда «Рубин» будет первой осуществлять подачу не более, чем в двух играх.

$\boxed{^{o}56}$ Для некоторого стрелка вероятность попадания в мишень равна $0{,}8$. Найдите вероятность того, что сделав пять выстрелов, стрелок попадёт в мишень не менее четырёх раз.

57. Для некоторого стрелка вероятность попадания в мишень равна $0{,}7$. Найдите вероятность того, что сделав четыре выстрела, стрелок попадёт в мишень не более двух раз.

58. Для некоторого стрелка вероятность попадания в мишень равна $0{,}6$.

Найдите вероятность того, что сделав четыре выстрела, стрелок попадёт в мишень не менее двух раз.

$\boxed{^{\circ}59}$ В коробке лежат два чёрных и три белых шара. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что оба вынутых шара окажутся чёрными?

60. В коробке лежат два чёрных, два белых и один красный шар. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся одного цвета?

61. В коробке лежат два чёрных и три белых шара. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся одного цвета?

62. В коробке лежат три чёрных и три белых шара. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся разных цветов?

$\boxed{^{\circ}63}$ Таня написала в блокноте трёхзначное число, делящееся на 28. Ваня должен угадать это число, написав шесть трёхзначных чисел, делящихся на 28, а затем сравнив эти числа с числом, написанным Таней. Какова вероятность, что Ваня угадает загаданное Таней число?

64. Маша написала в блокноте трёхзначное число, делящееся на 32. Коля должен угадать это число, написав семь трёхзначных чисел, делящихся на 32, а затем сравнив эти числа с числом, написанным Машей. Какова вероятность, что Коля угадает загаданное Машей число?

65. Какова вероятность, что первая цифра регистрационного номера автомобиля, выбранного случайным образом, есть цифра 0, а оставшиеся две цифры образуют двузначное число, делящееся на 5? (Регистрационный номер автомобиля содержит три цифры от 0 до 9, причём сразу три цифры 0 встречаться в номере не могут). Ответ округлите до тысячных.

66. Какова вероятность, что три цифры регистрационного номера автомобиля, выбранного случайным образом, образуют трёхзначное число, делящееся на 20? Ответ округлите до тысячных.

$\boxed{^{\circ}67}$ Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, меньшее 600 и делящееся на 4, но не делящееся на 8?

68. Из четырёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, большее 5000 и делящееся на 5, но не делящееся на 10? Ответ округлите до сотых.

69. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, меньшее 700 и делящееся на 3, но не делящееся на 7?

70. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, большее 300 и делящееся на 5, но не делящееся на 6? Ответ округлите до сотых.

$\boxed{^{\circ}71}$ Из четырёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, в десятичной записи которого не встречается цифра 9?

72. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит хотя бы одну цифру 6?

73. Из пятизначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит ровно две цифры 5?

74. Из шестизначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит ровно три цифры 7?

$\boxed{^{\circ}75}$ У Пети в копилке лежит 15 рублёвых и 7 двухрублёвых монет. Петя наугад достаёт из копилки две монеты. Найдите вероятность того, что он достанет не менее трёх рублей. Ответ округлите до тысячных.

76. У Коли в копилке лежит 16 рублёвых и 8 двухрублёвых монет. Коля наугад достаёт из копилки две монеты. Найдите вероятность того, что он достанет не более трёх рублей. Ответ округлите до тысячных.

77. У Маши в копилке лежит 10 рублёвых, 11 двухрублёвых и 12 пятирублёвых монет. Маша наугад достаёт из копилки две монеты. Найдите вероятность того, что она достанет не менее шести рублей. Ответ округлите до тысячных.

78. У Дины в копилке лежит 15 рублёвых, 12 двухрублёвых и 9 пятирублёвых монет. Дина наугад достаёт из копилки две монеты. Найдите вероятность того, что она достанет не более шести рублей. Ответ округлите до тысячных.

$\boxed{^{\text{o}}79}$ При подготовке к зачётам по двум предметам студент выучил по одному предмету 18 вопросов из 25, а по другому предмету — 16 вопросов из 20. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент получит «зачёт» по обоим предметам?

80. При подготовке к зачётам по двум предметам студент выучил по одному предмету 26 вопросов из 35, а по другому предмету — 21 вопрос из 32. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент не получит «зачёт» хотя бы по одному из этих двух предметов?

81. Студент готовится к зачётам по двум предметам, первый из которых содержит 32 вопроса, а второй — 30 вопросов. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. По первому предмету студент смог выучить 27 вопросов. Какое наименьшее число вопросов должен выучить студент по второму предмету, если он хочет, чтобы вероятность получения зачёта по обоим предметам была не менее 0,8?

$\boxed{^{\text{o}}82}$ Некоторый прибор состоит из трёх блоков. Если в работе одного из блоков происходит сбой, прибор отключается. Вероятность сбоя в течении года для первого блока составляет 0,3, для второго блока — 0,1, а для третьего блока — 0,4. Какова вероятность, что в течении года не произойдёт ни одного отключения данного прибора?

83. Некоторый прибор состоит из трёх блоков. Если в работе одного из блоков происходит сбой, прибор отключается. Вероятность сбоя в течении года для первого блока составляет 0,2, для второго блока — 0,3, а для третьего блока — 0,1. Какова вероятность, что в течении года произойдёт хотя бы одно отключение данного прибора?

$\boxed{^{\text{o}}84}$ При стрельбе по цели артиллерийская система делает несколько выстрелов. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле этой системы равна 0,7, а при каждом последующем выстреле — 0,8.

Какое наименьшее число выстрелов должна сделать эта система для того, чтобы вероятность уничтожения цели составляла более 0,99?

85. При стрельбе по цели артиллерийская система делает несколько выстрелов. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле этой системы равна 0,8, а при каждом последующем выстреле — 0,9. Какое наименьшее число выстрелов должна сделать эта система для того, чтобы вероятность уничтожения цели составляла не менее 0,998?

$\boxed{^{\text{o}}86}$ Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,998. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,001. Найдите вероятность того, что случайно выбранная готовая батарейка будет забракована системой контроля.

87. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,99. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 10% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

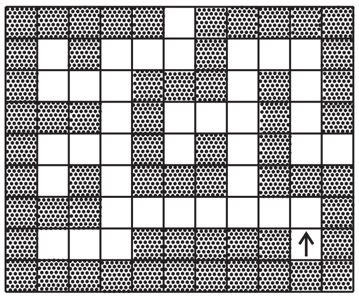
$\boxed{^{\text{o}}88}$ В некоторой местности летнее утро бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали, что летнее утро бывает ясным с вероятностью 0,8, причём если утро ясное, то вероятность дождя в течении дня равна 0,15, а если утро облачное — вероятность дождя в этот день равна 0,7. Какова вероятность того, что в случайно выбранный летний день будет дождь?

89. В некоторой местности летнее утро бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали, что летнее утро бывает ясным с вероятностью 0,6, причём если утро ясное, то вероятность дождя в течении дня равна 0,3, а если утро облачное — вероятность дождя в этот день равна 0,95. Какова вероятность того, что в случайно выбранный летний день дождя не будет?

о90 На острове, описанном в романе Жюля Верна «Таинственный остров», периодически происходят небольшие землятресения. Капитан Немо, основываясь на многолетних наблюдениях, подметил следующую закономерность: если в некоторый день землятресение произошло, то вероятность повторения землятресения на следующий день равна $0{,}1$, а если землятресения не было, то вероятность землятресения на следующий день равна $0{,}8$. Какова вероятность того, что 9 марта землятресение произойдёт, если 6 марта землятресения не было?

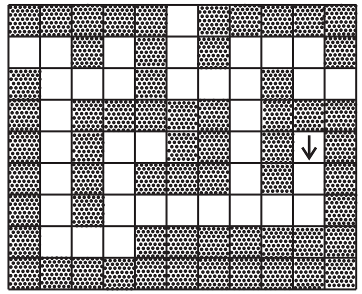
91. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная. При этом, установившись утром, погода держится неизменной весь день, а вероятность изменения погоды на следующий день равна $0{,}3$. Найдите вероятность того, что 5 сентября в Волшебной стране будет хорошая погода, если 1 сентября погода в Волшебной стране была отличная.

о92 Внутрь лабиринта, изображённого на данном ниже рисунке, на клетку, отмеченную знаком $\uparrow$, помещён мышонок.

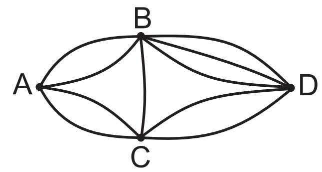


Мышонок выбирается из лабиринта передвигаясь наугад — в любой момент времени он с равной степенью вероятности может переместиться в любую из свободных клеток, соседних с той, где он находится в данный момент (соседними являются клетки, имеющие общую сторону), при этом назад мышонок поворачивает только в том случае, если упёрся в тупик. Какова вероятность того, что мышонок выберется из лабиринта, ни разу не попав в тупик?

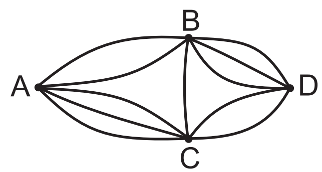
93. Решите предыдущую задачу для приведённого ниже лабиринта, где начальное положение мышонка отмечено знаком $\downarrow$.



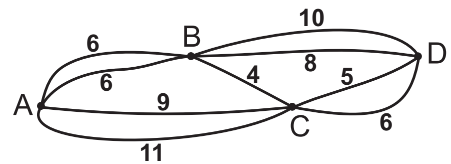
х94 На рисунке показана схема дорог, ведущих из пункта A в пункт D. Водитель случайным образом выбирает один из возможных маршрутов (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что будет выбран маршрут, проходящий через пункт B?



95. На рисунке показана схема дорог, ведущих из пункта A в пункт D. Водитель случайным образом выбирает один из возможных маршрутов (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что будет выбран маршрут, не проходящий через пункт B?

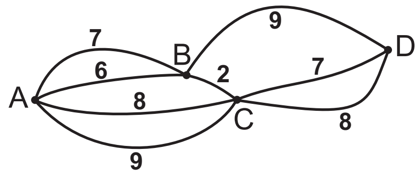


х96 На рисунке показана схема дорог из пункта A в пункт D с указанием их длины — рядом с каждой линией указано число, обозначающее длину соответствующей дороги в км.



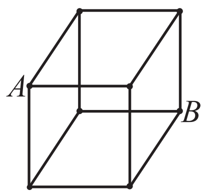
Водитель наугад выбирает маршрут из A в D (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что им будет выбран маршрут наименьшей возможной длины?

97. На рисунке показана схема дорог из пункта A в пункт D с указанием их длины – рядом с каждой линией указано число, обозначающее длину соответствующей дороги в км.



Водитель выбирает один из маршрутов, имеющих наименьшую возможную длину. Какова вероятность, что выбранный им маршрут будет проходить через пункт B? Ответ округлите до сотых.

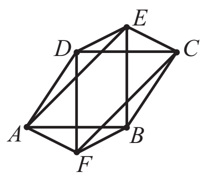
о98 По изготовленному из проволоки каркасу куба с ребром 1 дм ползает муравей. Доползая вдоль ребра куба до одной из вершин, муравей с равной степенью вероятности может повернуть на любое из соседних рёбер, но не назад. В начальный момент муравей находится в вершине A. Ответьте на следующие вопросы:



а) Какова вероятность, что после того, как муравей проползёт 3 дм, он окажется в вершине B?

б) Какова вероятность, что после того, как муравей проползёт 4 дм, он снова окажется в вершине A?

99. По изготовленному из проволоки каркасу октаэдра с ребром 1 дм ползает муравей (октаэдр – правильный многогранник, который можно представить себе склееным из двух правильных четырёхугольных пирамид, у каждой из которых все рёбра равны друг другу, см. рисунок). Доползая вдоль ребра октаэдра до одной из вершин, муравей с равной степенью вероятности может повернуть на любое из соседних рёбер, но не назад. В начальный момент муравей находится в вершине E. Какова вероятность, что муравей снова окажется в вершине E после того, как он проползёт: а) 3 дм; б) 4 дм?



100 На отрезке $[-3{,}8; 4{,}2]$ числовой оси случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что координата отмеченной точки будет отрицательна?

101. На отрезке $[-5; 15]$ числовой оси случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что координата отмеченной точки будет больше -2, но меньше 11?

102 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась преодолев отметку 5, но не достигнув отметки 8.

103. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент перестали идти. Найдите вероятность того, что минутная стрелка остановилась, преодолев отметку 7 и не дойдя до отметки 4.

х104 В квадрате с длиной стороны 1 случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней стороны квадрата окажется больше, чем $0{,}35$?

105. В прямоугольнике с длинами сторон 8 и 16 случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней стороны прямоугольника окажется меньше, чем 1?

Решения

Номера задач, к которым приведены решения: **7, 9, 11, 16, 18, 24, 26, 30, 39, 42, 47, 49, 51, 55, 57, 60, 63, 69, 72, 74, 78, 80, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 101, 104.**

Основой успешного решения этого задания является понимание выпускником термина «вероятность случайного события». Ниже приведена такая расшифровка этого термина, которая интуитивно понятна и удобна в использовании на практике.

Вероятностью того, что в результате проведения некоторого опыта наступит интересующее нас событие, называется отношение числа тех исходов опыта, в которых интересующее нас событие происходит, к числу всех возможных исходов опыта.

Рассмотрим следующие примеры.

7. Новогодняя гирлянда состоит из 250 красных, 300 зелёных, 100 жёлтых и 150 синих лампочек. Одна из лампочек перегорела. Какова вероятность, что перегоревшая лампочка красного цвета?

Решение.

Число всех лампочек в гирлянде равно $250+300+100+150=800$. Так как перегореть могла любая из этих лампочек, то число всех «исходов опыта» равно 800. «Интересующее нас событие» — перегорела красная лампочка. Поскольку красных лампочек 250 и перегореть могла любая из них, то «интересующее нас событие» происходит в 250 исходах опыта. Таким образом, вероятность «интересующего нас события» равна $\dfrac{250}{800}=\dfrac{5}{16}=0{,}3125$.

Ответ: 0,3125

9. На фабрике керамической посуды 8% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 85% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка будет иметь дефект. Ответ округлите до тысячных.

Решение.

Рассмотрим партию из 1000 тарелок. Число тарелок с дефектом в этой партии равно $1000\cdot 0{,}08=80$. Из этих 80 тарелок при контроле качества будет выявлено $80\cdot 0{,}85=68$ тарелок, а оставшиеся 12 тарелок с дефектом не будут обнаружены и поступят в продажу. Так как из рассматриваемой партии в продажу поступит $1000-68=932$ тарелки, среди которых дефект имеют 12 тарелок, то искомая вероятность равна $\dfrac{12}{932}=0{,}0128..$, и округляя до тысячных, получаем ответ.

Ответ: 0,013

11. В одном из регионов производством постельного белья занимаются две фабрики. Первая фабрика выпускает 40% постельного белья, реализуемого в данном регионе, вторая — 60%. Среди комплектов постельного белья, произведённых первой фабрикой, дефекты пошива имеют 5% комплектов, у второй фабрики дефекты пошива имеют 9% комплектов. Найдите вероятность того, что случайно купленный в данном регионе комплект постельного белья имеет дефект.

Решение.

Из каждых 1000 комплектов постельного белья, проданных в данном регионе, первой фабрикой произведены 400 комплектов, а второй — 600 комплектов. Среди 400 комплектов, произведённых первой фабрикой, дефекты пошива будут иметь $400\cdot 0{,}05=20$ комплектов, а среди 600 комплектов, произведённых второй фабрикой, дефекты пошива будут иметь $600\cdot 0{,}09=54$ комплекта. Следовательно, из каждых 1000 комплектов постельного белья дефекты будут иметь $20+54=74$ комплекта. Поэтому искомая вероятность равна $\dfrac{74}{1000}=0{,}074$.

Ответ: 0,074

16. В конкурсе эстрадной песни «Евровидение» участвуют представители 40 стран, по одному исполнителю от каждой страны. Все выступления разбиваются жеребъёвкой на два полуфинала, по 20 выступлений в каждом. Порядок выступления в полуфинале также определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится во втором полуфинале и будет не ранее, чем 12 по счёту?

Решение.

Если выступление представителя России состоится во втором полуфинале и будет не ранее, чем 12 по счёту, то это означает, что оно будет не менее, чем 32 по счёту среди всех 40 выступлений. «Интересующее нас событие» происходит в 9 случаях из 40 (количество целых чисел от 32 до

40 включая равно 9). Поэтому искомая вероятность равна $\frac{9}{40} = 0{,}225$.

Ответ: 0,225

18. В командном соревновании по художественной гимнастике участвуют команды 36 стран, в число которых входят Белоруссия, Казахстан, Китай и Россия. Порядок выступления команд определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что команда Китая начнёт выступление позже, чем команда России, но раньше, чем команды Белоруссии и Казахстана? Ответ округлите до тысячных.

Решение.

«Интересующее нас событие» — команда Китая начнёт выступление позже команды России, но раньше, чем команды Белоруссии и Казахстана. Каждой из 36 команд присвоим порядковый номер, в соответствии с тем, какой по счёту она начинает выступление (т.е. тот номер, который выпадает ей при жеребъёвке). Командам Белоруссии, Казахстана, Китая и России будут присвоены какие-то 4 из этих номеров, например, $5, 6, 8, 10$. Так как вероятность выпадения какой-то конкретной четвёрки номеров одинакова для каждой из возможных четвёрок, то достаточно посчитать вероятность «интересующего нас события» для одной из этих четвёрок. В приведённом выше примере «интересующее нас событие» наступает в следующих двух случаях: команда России начинает выступление пятой, команда Китая — шестой, а команды Белоруссии и Казахстана соответственно восьмой и десятой, или же наоборот — десятой и восьмой. Количество всех способов присвоить командам Белоруссии, Казахстана, Китая и России номера $5, 6, 8, 10$ равно $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{24} = \frac{1}{12} = 0{,}083(3)$, и округляя до тысячных, получаем ответ.

Ответ: 0,083

Примечание. Покажем, что количество способов присвоить n «предметам» порядковые номера от 1 до n равно $n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ (в рассмотренном выше решении $n = 4$). В самом деле, первому «предмету» можно присвоить любой из n номеров, второму — любой из оставшихся $(n-1)$ номеров, третьему — любой из оставшихся $(n-2)$ номеров, и т.д., при этом последнему предмету достанется единственный оставшийся номер. Поэтому общее число способов присвоить номера всем «предметам» равно $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Примечание 2. Поясним подробнее один из ключевых моментов приведённого выше решения, а именно следующее утверждение: «Так как вероятность выпадения какой-то конкретной четвёрки номеров одинакова для каждой из возможных четвёрок, то достаточно посчитать вероятность «интересующего нас события» для одной из этих четвёрок.» Количество способов выбрать четвёрку номеров для присвоения командам Белоруссии, Казахстана, Китая и России равно C_{36}^4 (число способов выбрать 4 элемента из 36), поэтому вероятность выпадения какой-то конкретной четвёрки номеров равна $1/C_{36}^4$. При подсчёте числа случаев наступления «интересующего нас события» число случаев, найденное для конкретной четвёрки, умножается на множитель C_{36}^4, а при нахождении искомой вероятности этот общий множитель сокращается: «интересующее нас событие» происходит в $2 \cdot C_{36}^4 \cdot 32!$ случаях, а общее число всех случаев равно $24 \cdot C_{36}^4 \cdot 32!$ (общий множитель $32!$ соответствует числу способов присвоить номера остальным 32 командам).

24. Оценки за контрольную по алгебре в 9 классах школы представлены в таблице. Какова вероятность того, что оценка наугад выбранного учащегося 9«Б» будет отличаться от средней по школе оценки не более, чем на 0,5 балла? Ответ округлите до сотых.

	9«А» класс				9«Б» класс			
Отметка	«2»	«3»	«4»	«5»	«2»	«3»	«4»	«5»
Число учащихся	2	14	9	3	1	12	10	3

Решение.

Сначала найдём среднее по школе значение оценки за контрольную. Согласно таблице, оценки по всей школе таковы: «двоек» — 3 шт., «троек» — 26 шт., «четвёрок» — 19 шт., «пятёрок» — 6 шт. Значит, количество учеников, писавших контрольную, равно $3 + 26 + 19 + 6 = 54$, сумма баллов всех учеников равна $2 \cdot 3 + 3 \cdot 26 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 6 = 190$, а среднее по школе значение оценки равно $\frac{190}{54} = 3{,}518(518)$.

Оценка наугад выбранного учащегося 9«Б» будет отличаться от среднего по школе значения оценки, равного $3{,}518(518)$, не более, чем на 0,5 только в том случае, если эта оценка будет «четвёркой».

Поскольку количество «четвёрок» в 9«Б» равно 10, а общее число учеников из 9«Б», писавших контрольную, равно 26, то искомая вероятность равна $\frac{10}{26} = 0{,}384\ldots$, и округляя до сотых, получаем ответ.

Ответ: 0,38

26. Пункт контроля качества бракует партию деталей в том случае, если вероятность того, что выбранная наугад деталь окажется бракованной, превышает 0,045. Какое наибольшее число бракованных деталей могло быть в партии из 1100 деталей, если она успешно прошла контроль?

Решение.

Пусть n — искомое число бракованных деталей. Тогда вероятность того, что выбранная наугад деталь окажется бракованной, равна $\frac{n}{1100}$. По условию эта вероятность должна не превышать 0,045 (иначе партия была бы забракована), поэтому $\frac{n}{1100} \leqslant 0{,}045$. Отсюда имеем: $n \leqslant 1100 \cdot 0{,}045$, $n \leqslant 49{,}5$. Так как наибольшим целым числом, не превышающим 49,5, является число 49, то $n = 49$.

Ответ: 49

30. В коробке лежат 10 белых и 30 чёрных шаров. Какое наибольшее число чёрных шаров можно вынуть из этой коробки, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки белый шар была не больше 0,6?

Решение.

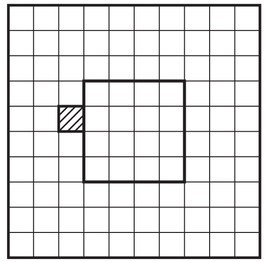
Пусть из коробки вынуто x чёрных шаров. Тогда в коробке осталось $30 - x$ чёрных и 10 белых шаров, т.е. всего $40 - x$ шаров. При этом вероятность наугад достать из коробки белый шар будет равна числу $\frac{10}{40-x}$. Это число не больше 0,6 в том случае, если $\frac{10}{40-x} \leqslant 0{,}6$. Так как число $40 - x$ положительно, то предыдущее неравенство равносильно неравенствам: $\frac{10}{0{,}6} \leqslant 40 - x$, $x \leqslant 40 - \frac{50}{3}$, $x \leqslant 23\frac{1}{3}$. Поэтому наибольшим целым значением x, для которого условие задачи выполнено, является $x = 23$.

Ответ: 23

39. Квадратный лист бумаги со стороной 10 см разбивают на 100 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не более 2 см?

Решение.

Расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составляет не более 2 см в том случае, если этот квадратик лежит внутри «каёмки» шириной 3 клетки, примыкающей к сторонам квадрата: на рисунке штриховкой выделен один из квадратиков этой «каёмки», расстояние от его ближайшей до границы листа стороны равно 2 см. Те из квадратиков, которые лежат вне этой «каёмки», образуют квадрат со стороной 4, дополняющий «каёмку» до квадрата 10×10, число этих квадратиков равно 16. Поэтому число квадратиков внутри «каёмки» равно $100 - 16 = 84$. Отсюда получаем, что искомая вероятность равна 0,84.



Ответ: 0,84

Отметим, что большинство оставшихся для рассмотрения задач близки к тем заданиям, с которыми выпускники встретятся при изучении «теории вероятностей» в ВУЗе, если выберут какую-либо экономическую или техническую специальность. Возможно, это обстоятельство послужит дополнительной мотивацией школьников к изучению данной темы.

42. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков составит не больше 9. Ответ округлите до тысячных.

Решение.

При бросании двух игральных кубиков число всех возможных исходов опыта равно числу различных комбинаций верхних граней этих кубиков (т.к. именно верхняя грань кубика указывает число выпавших очков), т.е. равно 36. Вместо нахождения числа «интересующих нас» исходов опыта, найдём сначала число всех остальных исходов опыта — тех, в которых сумма выпавших очков больше 9.

Пусть $(n; m)$ — пара чисел, соответствующая комбинации верхних граней кубиков. Простым перебором находим, что неравенство $n + m > 9$ выполняется для шести из этих пар чисел, а именно, для пар $(4; 6)$, $(6; 4)$, $(5; 5)$, $(5; 6)$, $(6; 5)$, $(6; 6)$. Таким образом, число тех исходов опыта, в которых выпадает более 9 очков, равно 6. Поэтому вероятность выпадения более 9 очков равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, а вероятность выпадения не более 9 очков равна $\dfrac{36-6}{36} = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6} = 0{,}833(3)$.

Ответ: 0,833

Примечание. По сути, данное выше решение это подробное объяснение (для начинающих) следующего приёма — вместо нахождения вероятности интересующего нас события (в нашем примере это выпадение не более 9 очков) можно найти вероятность противоположного события (выпадение более 9 очков). Если вероятность противоположного события равна p, то искомая вероятность будет равна $1-p$. Указанный приём является очень эффективным для тех задач, где число случаев, в которых наступает противоположное событие, значительно меньше числа тех случаев, в которых происходит интересующее нас событие.

47. Коля дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало не больше 3 очков.

Решение.

Пусть n — число, выпавшее при первом броске игрального кубика Колей, а m — число, выпавшее при втором броске. Перебором находим, что равенство $n+m=6$ выполняется для следующих пар чисел $(n;m)$: $(1;5), (5;1), (2;4), (4;2), (3;3)$. Таким образом, число всех исходов опыта, возможных по условию задачи, равно 5. Так как нас интересуют те исходы опыта, в которых $n \leqslant 3$, а это выполнено в трёх из пяти вышеперечисленных случаев — для пар $(1;5), (2;4), (3;3)$, то искомая вероятность равна $3/5$.

Ответ: 0,6

49. Монету подбрасывают несколько раз так, что каждый раз с равной вероятностью выпадает «орёл» или «решка». Найдите вероятность того, что при первых трёх подбрасываниях выпадет одна и та же сторона монеты (т.е. либо все три раза «орёл», либо все три раза «решка»).

Прежде чем перейти к решению данного примера договоримся о следующих сокращениях записи: во всех задачах с подбрасыванием монеты выпадение «орла» будем обозначать буквой «о», а выпадение «решки» — буквой «р». Также покажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. Если число подбрасываний монеты равно n, то число различных вариантов последовательности выпадений «орла» или «решки» равно 2^n.

В самом деле, при однократном подбрасывании монеты имеется ровно два варианта её выпадения — либо «о», либо «р», т.е. при $n=1$ наше

утверждение справедливо. Так как при каждом следующем подбрасывании монеты может выпасть как «о», так и «р», то при каждом следующем подбрасывании число вариантов последовательности выпадений «о» или «р» удваивается, что доказывает требуемое утверждение.

Вооружившись этой леммой, приступим к решению.

Решение.

При трёх подбрасываниях монеты имеется $2^3 = 8$ различных вариантов последовательности выпадений «о» или «р». Одна и та же сторона монеты выпадает три раза подряд в двух из этих вариантов: либо «о», «о», «о»; либо «р», «р», «р». Поэтому искомая вероятность равна $2/8 = 0{,}25$.

Ответ: 0,25

51. Монету подбрасывают несколько раз так, что каждый раз с равной вероятностью выпадает «орёл» или «решка». Найдите вероятность того, что при четырёх подбрасываниях монеты и «орёл» и «решка» выпадут хотя бы по одному разу.

Решение.

Так как при четырёх подбрасываниях монеты имеется $2^4 = 16$ различных вариантов последовательности выпадений «о» или «р», а вариантов, в которых все четыре раза выпадает одна и та же сторона монеты, всего два (либо все четыре раза «о», либо все четыре раза «р»), то число различных вариантов, в которых и «орёл» и «решка» выпадают хотя бы по одному разу, равно $16-2=14$. Поэтому искомая вероятность равна $\dfrac{14}{16} = \dfrac{7}{8} = 0{,}875$.

Ответ: 0,875

55. Перед началом волейбольного матча жребием определяется команда, которая будет первой осуществлять подачу. Команда «Рубин» по очереди играет с командами «Сапфир», «Изумруд», «Аметист» и «Топаз». Найдите вероятность того, что команда «Рубин» будет первой осуществлять подачу не более, чем в двух играх.

Решение.

Будем считать, что перед началом игры подбрасывают монету, и команда «Рубин» первой осуществляет подачу, если выпал «орёл», а если выпала «решка», то первыми подают соперники. Тогда вопрос задачи можно переформулировать так: какова вероятность, что при четырёх подбрасываниях монеты «орёл» выпадет не более двух раз?

При четырёх подбрасываниях монеты имеется $2^4 = 16$ различных вариантов последовательности выпадений «о» или «р». Вместо нахождения числа интересующих нас вариантов (в которых «орёл» выпал не более двух раз), найдём число вариантов противоположного события — «орёл» выпал не менее трёх раз.

Пусть «орёл» выпал не менее трёх раз, тогда он выпал либо ровно три раза, либо все четыре раза. Если в последовательности выпадений «о» встречается ровно три раза, то «р» встречается ровно один раз — это выполняется для четырёх вариантов: «р» находится или на 1-ом месте, или на 2-ом, или на 3-ем, или на 4-ом. Число вариантов последовательности выпадений, в которых «о» находится на всех четырёх позициях, равно 1. Таким образом, число вариантов последовательности выпадений, в которых «о» встречается не менее трёх раз, равно $4+1=5$. Отсюда получаем, что число вариантов, в которых «о» встречается не более двух раз, равно $16-5=11$, а искомая вероятность равна $11/16 = 0{,}6875$.

Ответ: 0,6875

57. Для некоторого стрелка вероятность попадания в мишень равна $0{,}7$. Найдите вероятность того, что сделав четыре выстрела, стрелок попадёт в мишень не более двух раз.

Решение.

Если вероятность попадания в мишень равна $0{,}7$, то вероятность промаха равна $0{,}3$. В записи результатов выстрелов попадание будем обозначать знаком «+», а промах знаком «−».

Вместо вероятности «интересующего нас» события найдём вероятность противоположного события — стрелок попал в мишень более двух раз, т.е. либо три раза, либо все четыре раза. Для этого противоположного события в записи результатов стрельбы будет последовательность из 4-х знаков «+» или «−», в которой количество знаков «+» равно либо 3, либо 4.

Событие 3 знака «+» и 1 знак «−» разбивается на следующие четыре события: $\{-,\ +,\ +,\ +\}$; $\{+,\ -,\ +,\ +\}$; $\{+,\ +,\ -,\ +\}$; $\{+,\ +,\ +,\ -\}$. Так как вероятность появления в результатах стрельбы каждого из знаков «+» равна $0{,}7$, а вероятность появления знака «−» равна $0{,}3$, то вероятности каждого из приведённых выше четырёх результатов стрельбы равны $0{,}7^3 \cdot 0{,}3$. Поэтому вероятность того, что при четырёх выстрелах будет три попадания и один промах, равна $4 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3$.

Вероятность четырёх попаданий равна, очевидно, $0{,}7^4$. Следовательно, вероятность «противоположного» события равна $0{,}7^4 + 4 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 = 0{,}7^3 \cdot (0{,}7 + 4 \cdot 0{,}3) = 0{,}343 \cdot 1{,}9 = 0{,}6517$, а вероятность «интересующего нас» события равна $1 - 0{,}6517 = 0{,}3483$.

Ответ: 0,3483

60. В коробке лежат два чёрных, два белых и один красный шар. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся одного цвета?

Решение. Способ 1

Так как в коробке лишь 1 красный шар, то вынутые шары могут оказаться одноцветными лишь в том случае, если они оба белые или оба чёрные. Будем считать, что шары извлекают из коробки поочереди — сначала один, а затем другой, и найдём вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми.

Первый вынутый шар оказывается белым в двух случаях из пяти (всего шаров пять, из них белых — два). Если первый шар оказался белым, то второй вынутый шар окажется белым лишь в одном случае из четырёх возможных (среди оставшихся 4 шаров белым является лишь один). Поэтому и первый и второй шар окажутся белыми в числе случаев, равном $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ от числа всех возможных случаев. То есть вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна $0{,}1$.

Вероятность того, что оба вынутых шара окажутся чёрными, также равна $0{,}1$ (приведённое выше рассуждение можно повторить дословно, заменив белый цвет на чёрный). Следовательно, вероятность того, что оба вынутых шара окажутся одного цвета, равна $0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$.

Способ 2

Так как всего в ящике пять шаров, то число всех способов выбрать какие-то два из этих шаров равно C_5^2 (число сочетаний из 5 по 2). Согласно формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$, имеем: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (напомним, что $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, по определению). Среди всех способов выбрать два шара из пяти имеющихся ровно для двух способов выбора эти шары будут одноцветными — либо оба выбранных шара белые, либо оба чёрные. Таким образом, вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета, равна $\dfrac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2

63. Таня написала в блокноте трёхзначное число, делящееся на 28. Ваня должен угадать это число, написав шесть трёхзначных чисел, делящихся на 28, а затем сравнив эти числа с числом, написанным Таней. Какова вероятность, что Ваня угадает загаданное Таней число?

Решение.

Наименьшим трёхзначным числом, делящимся на 28, является число $28 \cdot 4 = 112$, а наибольшим трёхзначным числом, делящимся на 28, является число $28 \cdot 35 = 980$. Поэтому количество трёхзначных чисел, делящихся на 28, равно $35 - 3 = 32$ (таких чисел ровно столько же, сколько натуральных чисел от 4 до 35 включая). Так как Ваня пишет какие-то шесть из этих чисел, то вероятность того, что он угадает загаданное Таней число, равна $\frac{6}{32} = 0{,}1875$.

Ответ: $0{,}1875$

69. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, меньшее 700 и делящееся на 3, но не делящееся на 7?

Решение.

Число всех возможных исходов опыта равно количеству трёхзначных чисел, т.е. равно 900 (могло быть выбрано любое число от 100 до 999). Найдём число «интересующих нас» исходов опыта. Поскольку наименьшим трёхзначным числом, делящимся на 3, является число $3 \cdot 34 = 102$, а $3 \cdot 233 = 699$, то количество трёхзначных чисел, меньших 700 и делящихся на 3, равно $233 - 33 = 200$ — это числа $3 \cdot 34$, $3 \cdot 35$, , ..., $3 \cdot 233$. Заметим, что $35 = 7 \cdot 5$, а $231 = 7 \cdot 33$, поэтому среди указанных выше чисел делящимися на 7 являются числа $(3 \cdot 7) \cdot 5$, $(3 \cdot 7) \cdot 6$, ..., $(3 \cdot 7) \cdot 33$, количество которых равно $33 - 4 = 29$. Таким образом, количество трёхзначных чисел, меньших 700 и делящихся на 3, но не делящихся на 7, равно $200 - 29 = 171$, а искомая вероятность равна $\frac{171}{900} = \frac{19}{100} = 0{,}19$.

Ответ: $0{,}19$

72. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит хотя бы одну цифру 6?

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — то есть вероятность

того, что будет выбрано число, десятичная запись которого не содержит ни одной цифры 6.

Найдём количество трёхзначных чисел, десятичная запись которых не содержит ни одной цифры 6. Для первой цифры такого числа имеется 8 возможностей — все цифры от 1 до 9 за исключением цифры 6, а для второй и третьей цифры такого числа имеется по 9 возможностей — все цифры от 0 до 9 за исключением цифры 6. Следовательно, количество таких чисел равно $8 \cdot 9 \cdot 9$, а вероятность выбрать такое число среди всех трёхзначных чисел равна $\frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{900} = \frac{72}{100} = 0{,}72$.

Так как вероятность противоположного события равна $0{,}72$, то искомая вероятность равна $1 - 0{,}72 = 0{,}28$.

Ответ: $0{,}28$

74. Из шестизначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит ровно три цифры 7?

Решение.

Найдём сначала количество таких шестизначных чисел, содержащих в десятичной записи три цифры 7, в которых первая цифра отлична от 7. Для выбора первой цифры такого числа имеется 8 возможностей — все цифры от 1 до 9 за исключением 7. Для выбора остальных пяти цифр такого числа имеется $C_5^3 \cdot 9 \cdot 9$ способов: C_5^3 — число способов определить те три позиции, на которых будут находиться цифры 7, $9 \cdot 9$ — число способов выбрать две оставшихся цифры (для каждой из этих цифр имеется 9 возможностей — все цифры от 0 до 9 за исключением 7). Следовательно, количество шестизначных чисел, содержащих в десятичной записи три цифры 7, в которых первая цифра отлична от 7, равно $8 \cdot C_5^3 \cdot 81 = 6480$ $\left(C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\right)$.

Теперь найдём количество таких шестизначных чисел, содержащих в десятичной записи три цифры 7, в которых первой цифрой является 7. Для выбора пяти цифр такого числа (со 2-ой по 6-ую цифры) имеется $C_5^2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 7290$ способов: C_5^2 — число способов определить те две позиции, на которых будут находиться цифры 7, $9 \cdot 9 \cdot 9$ — число способов выбрать три оставшихся цифры.

Из результатов двух предыдущих абзацев следует, что количество всех шестизначных чисел, содержащих в десятичной записи три цифры 7, равно $6480 + 7290 = 13770$. Осталось заметить, что поскольку количество всех шестизначных чисел равно 900000, то искомая вероятность равна $\dfrac{13770}{900000} = \dfrac{153}{10000} = 0{,}0153.$

Ответ: 0,0153

78. У Дины в копилке лежит 15 рублёвых, 12 двухрублёвых и 9 пятирублёвых монет. Дина наугад достаёт из копилки две монеты. Найдите вероятность того, что она достанет не более шести рублей. Ответ округлите до тысячных.

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — Дина достала из копилки более 6 рублей или, что то же самое, не меньше 7 рублей.

Если из копилки вынуто не меньше 7 рублей двумя монетами, то одна из этих монет обязательно пятирублёвая, а другая — либо пятирублёвая, либо двухрублёвая.

Достать из копилки две пятирублёвые монеты Дина может $C_9^2 = 36$ способами. А одну пятирублёвую и одну двухрублёвую монеты Дина может достать $9 \cdot 12$ способами. Так как всего у Дины 36 монет, то выбрать две из них можно $C_{36}^2 = \dfrac{36 \cdot 35}{2} = 18 \cdot 35$ способами.

Таким образом, вероятность того, что Дина достанет не меньше 7 рублей, равна $\dfrac{36 + 9 \cdot 12}{18 \cdot 35} = \dfrac{2+6}{35} = \dfrac{8}{35}$. А искомая вероятность равна $1 - \dfrac{8}{35} = \dfrac{27}{35} = 0{,}7714\ldots$ *Ответ:* 0,771

80. При подготовке к зачётам по двум предметам студент выучил по одному предмету 26 вопросов из 35, а по другому предмету — 21 вопрос из 32. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент не получит «зачёт» хотя бы по одному из этих двух предметов?

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — то есть вероятность того, что студент получит «зачёт» по обоим предметам.

Число вариантов выбора одного вопроса по первому предмету и одного вопроса по второму равно $35 \cdot 32$. Студент знает ответ на оба вопроса для

$26 \cdot 21$ из этих вариантов. Поэтому вероятность того, что студент получит «зачёт» по обоим предметам, равна $\dfrac{26 \cdot 21}{35 \cdot 32} = \dfrac{13 \cdot 3}{5 \cdot 16} = \dfrac{39}{80}$.

Так как вероятность противоположного события равна $39/80$, то искомая вероятность равна $1 - \dfrac{39}{80} = \dfrac{41}{80} = 0{,}5125.$ *Ответ:* 0,5125

83. Некоторый прибор состоит из трёх блоков. Если в работе одного из блоков происходит сбой, прибор отключается. Вероятность сбоя в течении года для первого блока составляет $0{,}2$, для второго блока — $0{,}3$, а для третьего блока — $0{,}1$. Какова вероятность, что в течении года произойдёт хотя бы одно отключение данного прибора?

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — то есть вероятность того, что в течении года не произойдёт ни одного отключения данного прибора.

Вероятность работы без единого сбоя в течении года для 1-го блока равна $1 - 0{,}2 = 0{,}8$, для 2-го блока эта вероятность равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$, а для 3-го блока эта вероятность равна $1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Отсюда находим, что вероятность работы без единого сбоя в течении года всех трёх блоков (т.е. вероятность того, что в течении года не произойдёт ни одного отключения прибора) равна $0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$.

Так как вероятность противоположного события равна $0{,}504$, то искомая вероятность равна $1 - 0{,}504 = 0{,}496$.

Ответ: 0,496

85. При стрельбе по цели артиллерийская система делает несколько выстрелов. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле этой системы равна $0{,}8$, а при каждом последующем выстреле — $0{,}9$. Какое наименьшее число выстрелов должна сделать эта система для того, чтобы вероятность уничтожения цели составляла не менее $0{,}998$?

Решение.

Сначала найдём вероятность того, что при n выстрелах данной артиллерийской системы цель не будет поражена. Из условия следует, что вероятность промаха по цели при первом выстреле системы равна $0{,}2$, а вероятность промаха по цели при каждом следующем выстреле равна $0{,}1$. Поэтому вероятность промаха по цели при двух выстрелах равна $0{,}2 \cdot 0{,}1$, вероятность промаха по цели при трёх выстрелах равна $0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 \cdot 0{,}1^2$, и продолжая аналогично далее, получаем, что вероятность промаха по цели при n выстрелах равна $0{,}2 \cdot 0{,}1^{n-1}$.

Вероятность уничтожения цели составляет не менее $0{,}998 \Leftrightarrow$ вероятность промаха по цели составляет не более $0{,}002$. Поэтому если n — искомое значение числа выстрелов, то $0{,}2 \cdot 0{,}1^{n-1} \leqslant 0{,}002$, $0{,}1^{n-1} \leqslant 0{,}01$, $0{,}1^{n-1} \leqslant 0{,}1^2 \Leftrightarrow n-1 \geqslant 2$, $n \geqslant 3$. Таким образом, наименьшее число выстрелов, при котором вероятность промаха по цели составит не более $0{,}002$, равно 3.

Ответ: 3

87. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом анализ даёт положительный результат с вероятностью $0{,}99$. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью $0{,}02$. Известно, что 10% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение.

Рассмотрим выборку анализов 1000 пациентов, поступивших с подозрением на гепатит. Согласно условию, из этих 1000 пациентов число действительно больных гепатитом равно $1000 \cdot 0{,}1 = 100$. Среди результатов анализа этих 100 пациентов положительными будут $100 \cdot 0{,}99 = 99$ анализов, а среди результатов анализа остальных 900 пациентов, не больных гепатитом, положительными будут $900 \cdot 0{,}02 = 18$ анализов. Таким образом, общее число положительных результатов будет равно $99 + 18 = 117$ случаев на каждую тысячу анализов. Поэтому искомая вероятность равна $117/1000 = 0{,}117$.

Ответ: 0,117

89. В некоторой местности летнее утро бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали, что летнее утро бывает ясным с вероятностью $0{,}6$, причём если утро ясное, то вероятность дождя в течении дня равна $0{,}3$, а если утро облачное — вероятность дождя в этот день равна $0{,}95$. Какова вероятность того, что в случайно выбранный летний день дождя не будет?

Решение.

Для удобства будем считать, что «летнее» время длится в данной местности ровно 100 дней. Так как летнее утро ясное с вероятностью $0{,}6$, то из 100 дней ясными будут 60, а облачными — 40.

Вероятность дождя в ясный день равна $0{,}3$, поэтому из 60 ясных дней будет $60 \cdot 0{,}3 = 18$ дней, в течение которых пройдёт дождь.

Вероятность дождя в облачный день равна $0{,}95$, поэтому из 40 облачных дней будет $40 \cdot 0{,}95 = 38$ дней, в течение которых пройдёт дождь.

Таким образом, из 100 дней дождь будет в течение $18 + 38 = 56$ дней, а не будет дождя в течение 44 дней, т.е. искомая вероятность равна $0{,}44$.

Ответ: 0,44

91. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная. При этом, установившись утром, погода держится неизменной весь день, а вероятность изменения погоды на следующий день равна $0{,}3$. Найдите вероятность того, что 5 сентября в Волшебной стране будет хорошая погода, если 1 сентября погода в Волшебной стране была отличная.

Решение.

Так как 1 сентября погода была отличная, а вероятность смены погоды на следующий день равна $0{,}3$, то вероятность хорошей погоды 2 сентября равна $0{,}3$. Соответственно, вероятность отличной погоды 2 сентября равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Аналогично, учитывая, что вероятность смены погоды равна $0{,}3$, получаем, что вероятность события «погода будет хорошей и 2-го и 3-го сентября» равна $0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$, а вероятность события «2 сентября погода будет хорошей, 3-го сентября погода будет отличной» равна $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

Для сокращения записи условимся о следующих обозначениях: вероятность того, что на некоторое число n погода будет хорошей, обозначим через $P_n(\text{х})$, вероятность отличной погоды обозначим через $P_n(\text{о})$; вероятность того, что погода будет хорошей и на дату n и на следующий день, обозначим через $P_n(\text{х}, \text{х})$; вероятность того, что погода на дату n будет хорошей, а на следующий день отличной, обозначим, через $P_n(\text{х}, \text{о})$. Если использовать эти обозначения, то весь предыдущий абзац коротко запишется так: $P_2(\text{х}) = 0{,}3$, $P_2(\text{о}) = 0{,}7$, $P_2(\text{х}, \text{х}) = 0{,}21$, $P_2(\text{х}, \text{о}) = 0{,}09$.

Вводя по аналогии обозначения $P_n(\text{о}, \text{х}), P_n(\text{о}, \text{о})$ и проводя соответствующие вычисления, получим: $P_2(\text{о}, \text{х}) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$, $P_2(\text{о}, \text{о}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$. Для наглядности результаты этих вычислений сведены в данную ниже таблицу.

2 сентября	2 - 3 сентября	
P_2(x)=0,3	P_2(x,o)=0,09	P_2(x,x)=0,21
P_2(o)=0,7	P_2(o,o)=0,49	P_2(o,x)=0,21
	P_3(o)=0,58	P_3(x)=0,42

Приведём пояснение к третьей строке этой таблицы. Так как событие «3-го сентября погода была отличной» можно разбить на два непересекающихся события — «погода была отличной и 3-го и 2-го сентября» и «3-го сентября погода была отличной, а 2-го сентября хорошей», то $P_3(\text{o}) = P_2(\text{o}, \text{o}) + P_2(\text{x}, \text{o}) = 0{,}49 + 0{,}09 = 0{,}58$. Аналогично имеем: $P_3(\text{x}) = P_2(\text{x}, \text{x}) + P_2(\text{o}, \text{x}) = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$.

Зная вероятности $P_3(\text{x}), P_3(\text{o})$ и действуя по приведённой выше схеме, заполним аналогичную таблицу и вычислим вероятности $P_4(\text{x}), P_4(\text{o})$:

3 сентября	3 - 4 сентября	
P_3(x)=0,42	P_3(x,o)=0,126	P_3(x,x)=0,294
P_3(o)=0,58	P_3(o,o)=0,406	P_3(o,x)=0,174
	P_4(o)=0,532	P_4(x)=0,468

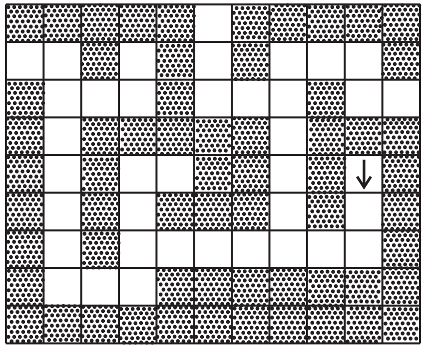
И наконец, зная вероятности $P_4(\text{x}), P_4(\text{o})$ и заполняя соответствующую таблицу, находим искомую вероятность $P_5(\text{x})$: $P_5(\text{x}) = 0{,}4872$.

4 сентября	4 - 5 сентября	
P_4(x)=0,468	P_5(x,o)=0,1404	P_5(x,x)=0,3276
P_4(o)=0,532	P_5(o,o)=0,3724	P_5(o,x)=0,1596
	P_5(o)=0,5128	P_5(x)=0,4872

Ответ: 0,4872

93. Внутрь лабиринта, изображённого на данном ниже рисунке, на клетку, отмеченную знаком $\downarrow$, помещён мышонок.

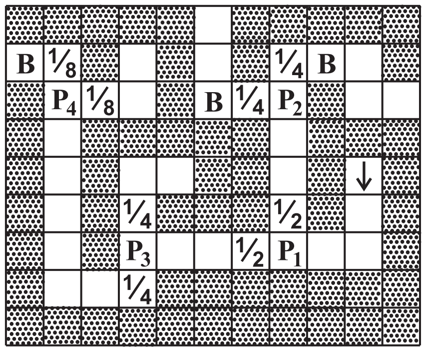
Мышонок выбирается из лабиринта передвигаясь наугад — в любой момент времени он с равной степенью вероятности может переместиться в любую из свободных клеток, соседних с той, где он находится в данный момент (соседними являются клетки, имеющие общую сторону), при этом назад мышонок поворачивает только в том случае, если упёрся в тупик.



Какова вероятность того, что мышонок выберется из лабиринта, ни разу не попав в тупик?

Решение.

Те клетки лабиринта, в которых есть выбор из нескольких возможных путей, отметим символом «Р» с порядковым номером (Р — первая буква слова развилка). А затем в те из клеток, которые соседствуют с клетками, отмеченными символом «Р», впишем числа, равные вероятности того, что мышонок окажется на этой клетке, см. данный ниже рисунок. Кроме того, те из клеток, попав на которые мышонок выходит из лабиринта, не встречая далее на своём пути ни одного тупика, отметим символом «В».

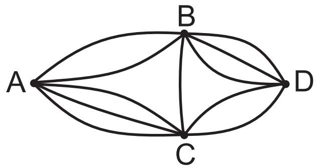


На клетку, помеченную символом P_1, мышонок попадёт обязательно, а на клетки, расположенные левее и выше неё, он попадает с вероятностью $1/2$. Так как на клетку, помеченную символом P_2, мышонок попадает с вероятностью $1/2$, то на каждую из двух клеток, расположенных выше и левее неё, он попадает с вероятностью, равной $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (на клетке P_2 мышонок оказывается в половине случаев, а поскольку пойти с этой клетки вверх или влево он может с равной вероятностью, то он оказывается выше (левее) клетки P_2 в половине от половины случаев, т.е. в $1/4$ части всех случаев). Продолжая аналогичные рассуждения далее, приходим к разметке клеток лабиринта, указанной на данном выше рисунке.

Искомая вероятность получается суммированием чисел, написанных рядом с теми клетками лабиринта, которые помечены символом В, т.е. она равна $1/4 + 1/4 + 1/8 = 0{,}625$.

Ответ: 0,625

95. На рисунке показана схема дорог, ведущих из пункта A в пункт D. Водитель случайным образом выбирает один из возможных маршрутов (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что будет выбран маршрут, не проходящий через пункт B?



Решение.

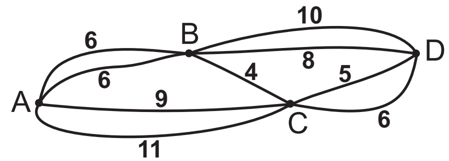
Из пункта A можно попасть напрямую в пункт B двумя способами (пункт B соединяют с пунктом A две дороги). Из пункта B можно проехать в пункт D пятью различными способами — двумя путями, проходящими через промежуточный пункт C, и тремя дорогами, соединяющими пункт B с пунктом D напрямую. Таким образом, существует $2 \cdot 5 = 10$ способов попасть из A в D по маршруту, первая дорога которого проходит через пункт B.

Так как пункт C соединяют с пунктом A три дороги, то существует $3 \cdot 5 = 15$ способов попасть из A в D по маршруту, первая дорога которого проходит через пункт C. При этом только $3 \cdot 2 = 6$ из этих маршрутов не проходят через пункт B.

Таким образом, всего существует $10 + 15 = 25$ различных маршрутов из пункта A в пункт D, из которых только 6 маршрутов не проходят через пункт B. Поэтому искомая вероятность выбрать маршрут, не проходящий через пункт B, равна $\frac{6}{25} = 0{,}24$.

Ответ: 0,24

96. На рисунке показана схема дорог из пункта A в пункт D с указанием их длины — рядом с каждой линией указано число, обозначающее длину соответствующей дороги в км.



Водитель наугад выбирает маршрут из A в D (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что им будет выбран маршрут наименьшей возможной длины?

Решение.

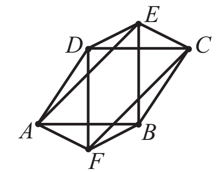
Общее число различных маршрутов из пункта A в пункт D подсчитывается аналогично тому, как это сделано в решении предыдущей задачи: маршрутов, первая дорога которых проходит через пункт B, $2 \cdot 4 = 8$; маршрутов, первая дорога которых проходит через пункт C, $2 \cdot 4 = 8$; всего различных маршрутов из пункта A в пункт D — $8 + 8 = 16$.

Легко видеть, что наименьшая длина маршрута из A в D равна 14 км, а число маршрутов, длина которых равна 14 км, равно трём: два маршрута, проходящие по дороге из A в B длиной 6 км и далее напрямую из B в D по дороге длиной 8 км, а также один маршрут проходящий по дороге из A в C длиной 9 км и далее напрямую из C в D по дороге длиной 5 км.

Следовательно, искомая вероятность выбрать маршрут наименьшей возможной длины равна $\frac{3}{16} = 0{,}1875$.

Ответ: 0,1875

99. По изготовленному из проволоки каркасу октаэдра с ребром 1 дм ползает муравей (октаэдр — правильный многогранник, который можно представить склееным из двух правильных четырёхугольных пирамид, у каждой из которых все рёбра равны друг другу, см. рисунок). Доползая вдоль ребра октаэдра до одной из вершин, муравей с равной степенью вероятности может повернуть на любое из соседних рёбер, но не назад. В начальный момент муравей находится в вершине E. Какова вероятность, что муравей снова окажется в вершине E после того, как он проползёт: а) 3 дм; б) 4 дм?



Решение.

Прежде чем приступать к решению задачи, введём одно определение: «путём длины k» будем называть любую последовательность из k рёбер данного октаэдра, в которой каждые два соседних элемента являются рёбрами, имеющими общую вершину, и при этом никакой элемент этой последовательности (т.е. ребро октаэдра) не повторяется два раза подряд.

а) Так как находясь в какой-либо вершине муравей с равной степенью вероятности может повернуть на любое из смежных с этой вершиной рёбер, то все пути, начинающиеся в вершине E и имеющие длину 3 дм, равновероятны. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{m}{n}$, где n – количество всех путей длиной 3 дм, выходящих из точки E, а m – количество путей длиной 3 дм, выходящих из точки E и заканчивающихся в точке E.

После того, как муравей проползёт 1 дм, он может оказаться в одной из вершин A, B, C, D. Заметим, что количество способов, которыми муравей, проползая ещё 2 дм, попадает обратно в вершину E, одинаковы для каждой из вершин A, B, C, D (это следует, например, из того, что при повороте вокруг оси EF на 45° октаэдр переходит сам в себя – вершина A переходит в вершину B, вершина B переходит в вершину C, и т.д.).

Обозначим через q количество всех путей длины 2 дм, выходящих из точки A и не содержащих ребро AE (по этому ребру муравей попал из точки E в точку A, и по условию поворачивать назад муравей не может). Через p обозначим количество путей длиной 2 дм, выходящих из точки A, не содержащих ребро AE и заканчивающихся в точке E. Тогда количество всех путей длиной 3 дм, выходящих из точки E, будет равно $4q$, т.е. $n = 4q$ (для каждой из точек A, B, C, D существует q путей, проходящих через эту точку). Аналогично, количество путей длиной 3 дм, выходящих из точки E и заканчивающихся в точке E, будет равно $4p$, т.е. $m = 4p$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{m}{n} = \frac{4p}{4q} = \frac{p}{q}$, т.е. нам достаточно найти p и q.

Проползая 1 дм из вершины A, муравей может оказаться в одной из вершин B, D, F. В каждой из вершин B, D, F муравей также может выбрать любое из трёх возможных рёбер. Поэтому $q = 3 \cdot 3 = 9$.

Легко видеть, что существует только два пути длиной 2 дм, выходящих из точки A и заканчивающихся в точке E: $\{AB, BE\}$ и $\{AD, DE\}$, т.е. $p = 2$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{p}{q} = \frac{2}{9}$.

б) Аналогично рассуждениям пункта а) получаем, что искомая вероятность равна $\frac{p}{q}$, где q – количество всех путей длиной 3 дм, выходящих из точки A и не содержащих ребро AE в качестве первого элемента, а p – количество путей длиной 3 дм, выходящих из точки A, не содержащих ребро AE в качестве первого элемента и заканчивающихся в точке E. Найдём q и p.

Так как из любой вершины октаэдра выходит ровно 4 ребра, то число всех путей длины 3 дм, выходящих из точки A и не содержащих ребро AE в качестве первого элемента, равно $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, т.е. $q = 27$ (путь – это последовательность рёбер, не содержащая одно и то же ребро два раза подряд, т.е. приходя в какую-либо вершину по одному из рёбер, муравей может выйти из этой вершины по любому из трёх оставшихся рёбер).

Вычислим p. Проползая 1 дм, муравей из вершины A попадает в одну из вершин B, D, F. Для каждой из вершин B и D существует ровно по одному пути длины 2 дм, оканчивающихся в точке E и не проходящих через точку A – это пути $\{BC, CE\}$ и $\{DC, CE\}$. Для вершины F существует три пути длиной 2 дм, оканчивающихся в точке E и не проходящих через точку A – это пути $\{FB, BE\}$, $\{FC, CE\}$ и $\{FD, DE\}$. Поэтому $p = 5$ (два пути, первое ребро которых заканчивается в точке B или D, и три пути, первое ребро которых заканчивается в точке F).

Итак, в пункте б) искомая вероятность равна $\frac{p}{q} = \frac{5}{27}$.

101. На отрезке $[-5; 15]$ числовой оси случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что координата отмеченной точки будет больше -2, но меньше 11?

Решение.

По определению «геометрической вероятности», вероятность выбрать точку внутри промежутка L так, чтобы она принадлежала некоторому промежутку l, расположенному внутри L, равна отношению длин промежутков l и L.

Согласно данному выше определению, искомая вероятность того, что отмеченная точка окажется внутри промежутка $(-2; 11)$, равна отношению длины промежутка $(-2; 11)$ к длине промежутка $[-5; 15]$, т.е. равна $\frac{13}{20} = 0{,}65$.

Ответ: 0,65

Примечание. Дадим следующее «интуитивное» обоснование определения геометрической вероятности. Будем считать, что речь идёт о «физических точках», каждая из которых имеет некоторый «размер», т.е. занимает на отрезке промежуток длины δ, причём число δ очень мало. Тогда отрезок длины L «будет содержать $N = L/\delta$ точек», отрезок длины l «будет содержать $n = l/\delta$ точек», а вероятность выбрать среди точек отрезка L точку, принадлежащую отрезку l, будет равна $\dfrac{n}{N} = \dfrac{l}{\delta} : \dfrac{L}{\delta} = \dfrac{l}{L}$.

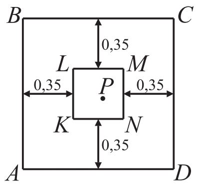
Разумеется, это обоснование не является сколь-нибудь строгим. Для более точного понимания сути определения «геометрической вероятности» необходимо знакомство с теорией меры.

104. В квадрате с длиной стороны 1 случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней стороны квадрата окажется больше, чем 0,35?

Решение.

Пусть $ABCD-$ данный квадрат. Заметим, что расстояние от некоторой точки P до ближайшей к ней стороны квадрата будет больше, чем 0,35, в том и только том случае, если расстояние от точки P до каждой из сторон AB, BC, CD и DA будет больше, чем 0,35.

Геометрическим местом тех точек, расстояние от которых до каждой из сторон AB, BC, CD и DA больше, чем 0,35, является внутренность квадрата $KLMN$, изображённого на данном ниже рисунке.



По определению «геометрической вероятности», вероятность выбрать точку P из некоторой фигуры F так, чтобы она принадлежала фигуре Φ, лежащей внутри фигуры F, равна отношению площади фигуры Φ к площади фигуры F.

Согласно приведённому выше определению, искомая вероятность выбрать точку из квадрата $ABCD$, принадлежащую квадрату $KLMN$, равна отношению площади квадрата $KLMN$ к площади квадрата $ABCD$. Так как сторона квадрата $KLMN$ равна 0,3, а сторона квадрата $ABCD$ равна 1, то искомая вероятность равна $0{,}3^2/(1^2) = 0{,}09$.

Ответ: 0,09

Контрольная работа.

Рекомендуемое время для выполнения работы 35 минут.

Рекомендуемая шкала оценивания результатов

число верных ответов	0-1	2	3-4	5
школьная оценка	2	3	4	5

Вариант 1

1. На 600 компакт-дисков в среднем приходится 12 бракованных. Какова вероятность, что взятый наугад компакт-диск окажется исправен?

2. На чемпионате Европы по лёгкой атлетике в соревнованиях по прыжкам в длину участвуют 25 спортсменов, среди которых 4 прыгуна из Чехии. Порядок прыжков определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что последним будет прыгать спортсмен из Чехии.

3. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков окажется равна 5. Ответ округлите до сотых.

4. Найдите вероятность того, что при двух подбрасываниях монеты «орёл» выпадет не менее одного раза.

5. Таня написала в блокноте трёхзначное число, делящееся на 26. Ваня должен угадать это число, написав семь трёхзначных чисел, делящихся на 26, а затем сравнив эти числа с числом, написанным Таней. Какова вероятность, что Ваня угадает загаданное Таней число?

Вариант 2

1. На 800 калькуляторов в среднем приходится 18 бракованных. Какова вероятность, что взятый наугад калькулятор окажется исправен?

2. На Летней Олимпиаде в соревнованиях по метанию молота участвуют 40 спортсменов, среди которых 3 спортсмена из Германии. Порядок прыжков определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцатым будет метать молот спортсмен из Германии.

3. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков окажется равна 7. Ответ округлите до сотых.

4. Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты «орёл» выпадет не более одного раза.

5. Маша написала в блокноте трёхзначное число, делящееся на 36. Коля должен угадать это число, написав шесть трёхзначных чисел, делящихся на 36, а затем сравнив эти числа с числом, написанным Машей. Какова вероятность, что Коля угадает загаданное Машей число?

Вариант 3

1. На экзамен по предмету «математический анализ» вынесено 40 вопросов. Студент не выучил 7 из этих вопросов. Для получения положительной оценки студенту необходимо ответить на один вопрос, выбранный случайным образом. Найдите вероятность того, что студент получит положительную оценку.

2. Научная конференция проводится в три дня. Всего заявлено 45 докладов: в первый день 9 докладов, а остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора С.М. Никольского окажется запланированным на последний день конференции?

3. Петя дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 5 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 3 очка.

4. Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты «решка» выпадет ровно два раза.

5. Какова вероятность, что регистрационный номер автомобиля, выбранного случайным образом, содержит не менее двух одинаковых цифр? (Регистрационный номер автомобиля содержит три цифры от 0 до 9, причём сразу три цифры 0 встречаться в номере не могут). Ответ округлите до тысячных.

Вариант 4

1. На экзамен по предмету «аналитическая геометрия» вынесено 32 вопроса. Студент не выучил 6 из этих вопросов. Для получения положительной оценки студенту необходимо ответить на один вопрос, выбранный случайным образом. Найдите вероятность того, что студент получит положительную оценку.

2. Научная конференция проводится в три дня. Всего заявлено 32 доклада: в первый день 10 докладов, а остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора С.Л. Соболева окажется запланированным на второй день конференции?

3. Маша дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 4 очка.

4. Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях монеты «решка» выпадет хотя бы один раз.

5. Какова вероятность, что в регистрационном номере автомобиля, выбранного случайным образом, встречаются подряд идущие одинаковые цифры? (Регистрационный номер автомобиля содержит три цифры от 0 до 9, причём сразу три цифры 0 встречаться в номере не могут). Ответ округлите до тысячных.

Вариант 5

1. В коробке с карандашами лежат 4 оранжевых, 5 голубых, 7 красных и 9 фиолетовых карандашей. Какова вероятность, что взятый наугад карандаш окажется красным?

2. Квадратный лист бумаги со стороной 20 см разбивают на 400 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от любой из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не менее 4 см?

3. Ваня дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при одном из бросков выпало не меньше 4 очков.

4. Перед началом волейбольного матча жребием определяется команда, которая будет первой осуществлять подачу. Команда «Рубин» по очереди играет с командами «Сапфир», «Изумруд», «Аметист» и «Топаз». Найдите вероятность того, что команда «Рубин» будет первой осуществлять подачу не более, чем в одной игре.

5. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, большее 300 и делящееся на 3, но не делящееся на 4? Ответ округлите до сотых.

Вариант 6

1. В коробке с новогодними украшениями лежат 14 бордовых, 8 бирюзовых, 12 золотистых и 6 серебристых шаров. Какова вероятность, что взятый наугад шар окажется золотистым?

2. Квадратный лист бумаги со стороной 30 см разбивают на 900 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от любой из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не менее 3 см?

3. Коля дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 7 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало не больше 3 очков.

4. Перед началом футбольного матча жребием определяется команда, которая получит право выбора ворот. Команда «Сатурн» по очереди играет с командами «Меркурий», «Марс», «Юпитер» и «Гелиос». Найдите вероятность того, что команда «Сатурн» получит право выбора ворот не менее, чем в двух играх.

5. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, меньшее 600 и делящееся на 5, но не делящееся на 8? Ответ округлите до сотых.

Вариант 7

1. Новогодняя гирлянда состоит из 380 красных, 210 зелёных, 190 жёлтых и 220 синих лампочек. Одна из лампочек перегорела. Какова вероятность, что перегоревшая лампочка красного цвета?

2. Квадратный лист бумаги со стороной 10 см разбивают на 100 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не более 3 см?

3. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков составит не больше 8. Ответ округлите до тысячных.

4. На первом этапе чемпионата по хоккею команда «Снежный Барс» проводит серию матчей с каждой из команд «Белый тигр», «Рысь», «Пума», «Буран». Право проведения первого матча на домашнем поле определяется жребием. Найдите вероятность того, что команда «Снежный Барс» будет проводить первый матч на домашнем поле не менее, чем в трёх сериях матчей.

5. Из четырёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит не более двух цифр 7?

Вариант 8

1. Новогодняя гирлянда состоит из 120 фиолетовых, 340 белых, 230 оранжевых и 110 розовых лампочек. Одна из лампочек перегорела. Какова вероятность, что перегоревшая лампочка белого цвета?

2. Квадратный лист бумаги со стороной 20 см разбивают на 400 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не более 6 см?

3. На гранях игрального кубика отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков составит не меньше 5. Ответ округлите до тысячных.

4. Перед началом матча по водному поло жребием определяется цвет шапочек, в которых играют команды. Команда «Бриз» по очереди играет с командами «Волна», «Дельфин», «Нептун» и «Посейдон». Найдите вероятность того, что команда «Бриз» будет играть в белых шапочках ровно в двух играх.

5. Из пятизначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит не более трёх цифр 8?

Вариант 9

1. В магазине на полке стоят DVD-диски с фильмами, среди которых 170 триллеров, 210 комедийных фильмов, 201 фильм в жанре «фантастика» и 119 мультипликационных фильмов. Какова вероятность, что взятый наугад диск будет содержать либо комедийный, либо мультипликационный фильм?

2. В коробке лежат 8 чёрных шаров. Какое наименьшее число белых шаров нужно положить в эту коробку, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки чёрный шар была не больше 0,24?

3. При подготовке к зачётам по двум предметам студент выучил по одному предмету 17 вопросов из 28, а по другому предмету — 21 вопрос из 34. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент не получит «зачёт» хотя бы по одному из этих двух предметов?

4. В коробке лежат три чёрных и шесть белых шаров. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся одного цвета?

5. Из четырёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит не более одной цифры 9?

Вариант 10

1. В магазине на полке стоят DVD-диски с фильмами, среди которых 220 детективов, 120 боевиков, 78 фильмов в жанре «вестерн» и 182 мелодрамы. Какова вероятность, что взятый наугад диск будет содержать либо боевик, либо фильм в жанре «вестерн»?

2. В коробке лежат 4 синих карандаша, 5 зелёных и 6 красных. Какое наибольшее число жёлтых карандашей можно положить в эту коробку, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки красный карандаш была не меньше 0,14?

3. При подготовке к зачётам по двум предметам студент выучил по одному предмету 18 вопросов из 25, а по другому предмету — 15 вопросов из 24. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент не получит «зачёт» хотя бы по одному из этих двух предметов?

4. В коробке лежат пять чёрных и десять белых шаров. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся разных цветов? Ответ округлите до сотых.

5. Из четырёхзначных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит не более одной цифры 0?

Ответы к упражнениям

Раздел I. Алгебра и начала анализа

§ 1. Преобразования выражений

1. 24,25 **2.** −7,325 **3.** 14,2 **4.** 179 **5.** −0,311 **6.** 0,5328 **7.** 0,918 **8.** −2,296 **9.** 0,006 **10.** 0,015 **11.** 0,004 **12.** 3,3 **13.** 0,0002 **14.** 400 **15.** 250 **16.** 0,18 **17.** 0,000008 **18.** 0,00003 **19.** 0,00006655 **20.** 0,000000672 **21.** 0,05 **22.** 0,2 **23.** 200 **24.** 1,5 **25.** 290 **26.** −100 **27.** −1,61 **28.** 4 **29.** −0,85 **30.** 0,2 **31.** 88 **32.** 0,01 **33.** 501 **34.** −449 **35.** 16,625 **36.** 3,03125 **37.** −4,875 **38.** 2,125 **39.** −52,5 **40.** −8,4375 **41.** −1,75 **42.** −0,8 **43.** −0,1875 **44.** 0,74 **45.** 9 **46.** 19 **47.** 23 **48.** 34 **49.** 5,5 **50.** 3 **51.** 16 **52.** −9 **53.** −3,5 **54.** 2,75 **55.** 4 **56.** −7 **57.** −2 **58.** −3 **59.** 20 **60.** 135 **61.** 60 **62.** 7,8 **63.** 0,8 **64.** 4,725 **65.** 385 **66.** 218 **67.** 11 **68.** −4 **69.** 6 **70.** 3 **71.** 6 **72.** 0,2 **73.** 0,18 **74.** 220 **75.** 140 **76.** 8 **77.** 3 **78.** 1,5 **79.** 5 **80.** 4 **81.** 21 **82.** 42 **83.** 50 **84.** 3,25 **85.** 3 **86.** 0,5 **87.** 2 **88.** 3 **89.** 6 **90.** 6,82 **91.** 2 **92.** 4 **93.** 0,5 **94.** 0,1 **95.** 4 **96.** 2 **97.** 6 **98.** 5 **99.** 2 **100.** 2,64 **101.** 4 **102.** −6 **103.** 10 **104.** 14 **105.** 4096 **106.** 625 **107.** 512 **108.** 225 **109.** 216 **110.** 25 **111.** 0,064 **112.** 0,0256 **113.** 567 **114.** 320 **115.** 12 **116.** 50 **117.** 0,75 **118.** 60,75 **119.** 1600 **120.** 85,75 **121.** 0,0105 **122.** 0,0288 **123.** 0,0126 **124.** 10,625 **125.** 0,0042 **126.** 0,00108 **127.** 0,01875 **128.** 0,0125 **129.** 125 **130.** 343 **131.** 512 **132.** 16 **133.** 0,1 **134.** 0,09 **135.** 0,125 **136.** 0,2 **137.** 4 **138.** 68,6 **139.** 1,5 **140.** 1,265625 **141.** 30 **142.** 50 **143.** 15 **144.** 56 **145.** 9 **146.** 7776 **147.** 4 **148.** 512 **149.** 0,2 **150.** 0,04 **151.** 0,5 **152.** 0,25 **153.** 270 **154.** 9,6 **155.** 12 **156.** 5625 **157.** 47,25 **158.** 363 **159.** 7776 **160.** 270000 **161.** 0,45 **162.** 729 **163.** 225 **164.** 3000 **165.** 18522 **166.** 1512,5 **167.** 39,2 **168.** 5929 **169.** 1,1 **170.** −41,1 **171.** −1,2 **172.** 36,15 **173.** 4 **174.** 24 **175.** 0,36 **176.** 1,375 **177.** −8 **178.** −14 **179.** 9 **180.** 2,4 **181.** −0,25 **182.** −0,15 **183.** 3,5 **184.** −52 **185.** −3 **186.** 0,4 **187.** −2 **188.** −45 **189.** 0,3 **190.** −0,625 **191.** −8,125 **192.** −290 **193.** 4 **194.** −0,5 **195.** −0,04 **196.** 0,714 **197.** 0,171 **198.** −0,91 **199.** −0,25 **200.** 0,002 **201.** 10,5 **202.** −18 **203.** 3 **204.** −42 **205.** −0,25 **206.** 0,375 **207.** −0,75 **208.** −0,25 **209.** −50 **210.** −5 **211.** 6 **212.** 0,75 **213.** 0,25 **214.** 4,5 **215.** −9,5 **216.** 1 **217.** −6 **218.** 2 **219.** −0,875 **220.** 2,2 **221.** 1,125 **222.** 2 **223.** 0,8 **224.** 5 **225.** 8 **226.** 6 **227.** 3 **228.** 4 **229.** 2 **230.** 3 **231.** 10 **232.** 21 **233.** 1024 **234.** 121,5

235. 12,5 **236.** 2,5 **237.** 0,375 **238.** 3,375 **239.** 2,1 **240.** 100 **241.** 64 **242.** 625 **243.** 81 **244.** 0,2 **245.** 4 **246.** 5 **247.** 2 **248.** 8,25 **249.** 11,2 **250.** 8,8 **251.** 3,075 **252.** 46 **253.** 56 **254.** 8 **255.** 42 **256.** −0,5 **257.** −0,3 **258.** −0,375 **259.** −0,3 **260.** 0,625 **261.** 0,875 **262.** −1,5 **263.** −2,5 **264.** 0,2 **265.** 0,1 **266.** 2 **267.** 2,5 **268.** 0,0625 **269.** −20 **270.** 0,15 **271.** 0,1 **272.** 0,25 **273.** 1,25 **274.** −0,5 **275.** 1 **276.** −0,2 **277.** −0,4 **278.** 0,5 **279.** −1 **280.** 0,1 **281.** 0,03125 **282.** 10 **283.** 6 **284.** −1 **285.** −4 **286.** 0,75 **287.** 7 **288.** 47 **289.** −17 **290.** −89,9 **291.** 18 **292.** 7,45 **293.** 13,425 **294.** 0,65 **295.** 0,22 **296.** 1 **297.** −1 **298.** −9 **299.** 25 **300.** 4 **301.** 9 **302.** 8 **303.** 12 **304.** 48 **305.** 1245000 **306.** 843,8 **307.** 327,5 **308.** 0,05 **309.** 2,6 **310.** 10,625 **311.** 3 **312.** 28 **313.** 31 **314.** 251,33 **315.** 942,48 **316.** 14,14 **317.** 78540 **318.** 37699 **319.** 5 **320.** 7 **321.** 15 **322.** а) 672; б) 456; в) 576; г) 7776. **323.** а) 64; б) 15; в) 24; г) 36.

§ 2. Решение уравнений

1. −8 **2.** 8,2 **3.** 11 **4.** 10 **5.** −41,5 **6.** 9 **7.** −4,5 **8.** 5,8 **9.** −1,1 **10.** −4,6 **11.** 5,375 **12.** 0,4 **13.** 1 **14.** 1 **15.** −8,4 **16.** −0,34 **17.** 1,5 **18.** 0,25 **19.** 0,375 **20.** 0,075 **21.** 0,125 **22.** 0,375 **23.** 0,0625 **24.** 0,05 **25.** −6 **26.** −9 **27.** −14 **28.** −18 **29.** 10 **30.** 6 **31.** 4 **32.** 5 **33.** 5,6 **34.** 6,5 **35.** 6,875 **36.** 5,75 **37.** −6 **38.** −8 **39.** 7 **40.** −12 **41.** 5 **42.** 34 **43.** 12 **44.** 20,4 **45.** 18 **46.** 2018 **47.** −7,3 **48.** −11,325 **49.** 140 **50.** 353 **51.** 272 **52.** 645 **53.** −228 **54.** −4 **55.** −52 **56.** −711 **57.** 18 **58.** 11 **59.** −1 **60.** −2 **61.** −3 **62.** −4 **63.** −2 **64.** −3 **65.** 3 **66.** 2 **67.** −4 **68.** −5 **69.** 5 **70.** 7 **71.** 2 **72.** 11 **73.** 6 **74.** 4 **75.** −12 **76.** −36 **77.** 70 **78.** 72 **79.** −46 **80.** −39 **81.** 1 **82.** 4,5 **83.** −0,5 **84.** 3,5 **85.** 0,1 **86.** −1,8 **87.** 2 **88.** 1,8 **89.** −0,5 **90.** 0,2 **91.** 1 **92.** 0,9 **93.** −3 **94.** −0,5 **95.** 4 **96.** 1,5 **97.** 1,25 **98.** 2,25 **99.** 1,1 **100.** −0,675 **101.** −4 **102.** −2 **103.** −9,5 **104.** −0,05 **105.** 3 **106.** 2 **107.** 2,5 **108.** 1,5 **109.** 5,5 **110.** 7,5 **111.** −1,75 **112.** 2,5 **113.** 6 **114.** 19 **115.** 8 **116.** 18 **117.** −2 **118.** −1 **119.** −4,5 **120.** −0,75 **121.** −2,375 **122.** −2,5 **123.** −0,9 **124.** 0,3 **125.** 2,75 **126.** −3 **127.** 0,75 **128.** 25 **129.** −4 **130.** −3 **131.** 0,5 **132.** 1,5 **133.** −20 **134.** −8 **135.** −10 **136.** −2 **137.** 0 **138.** 0 **139.** −1 **140.** −0,25 **141.** 0,5 **142.** 2 **143.** 1,5 **144.** 0,25 **145.** −22 **146.** −7 **147.** 35,5 **148.** 14 **149.** 241 **150.** 21 **151.** 5 **152.** 0,875 **153.** −24,5 **154.** −5,3 **155.** 6,5 **156.** 9 **157.** 56 **158.** 13 **159.** 20 **160.** 5,5 **161.** 17 **162.** 10 **163.** 7 **164.** 8 **165.** −5 **166.** −8 **167.** 14 **168.** 4 **169.** 3,5 **170.** 0,4 **171.** 8,4 **172.** 12,1 **173.** 0,04 **174.** 0,175 **175.** 0,025 **176.** 0,0625 **177.** −11 **178.** −9,2 **179.** 55,75 **180.** 258,5 **181.** 3,25 **182.** 8 **183.** 72 **184.** 17,25 **185.** −0,75 **186.** −0,6 **187.** −0,25

188. 0,25 **189.** 1,75 **190.** 4,5 **191.** 1,2 **192.** 2,1 **193.** 9 **194.** 0,5 **195.** 0,1 **196.** 0,1 **197.** 36 **198.** 25 **199.** 65536 **200.** 59049 **201.** −8 **202.** −13 **203.** −1 **204.** −3 **205.** −6 **206.** −10 **207.** 16 **208.** 40 **209.** 8,5 **210.** 1 **211.** 13 **212.** 9 **213.** −1,6 **214.** −0,4 **215.** −3,75 **216.** −4,4 **217.** −8 **218.** −5 **219.** −3,5 **220.** −3 **221.** −0,75 **222.** −0,25 **223.** 15 **224.** 12 **225.** 60 **226.** 11,25 **227.** −45 **228.** −60 **229.** −30 **230.** −90

§ 3. Анализ и чтение графиков функций

1. 250 **2.** 45 **3.** 18 **4.** 37,5 **5.** 4 **6.** 1,5 **7.** 10 **8.** 6 **9.** 9 **10.** 16 **11.** 2 **12.** 3 **13.** 8 **14.** 17 **15.** 5 **16.** 12,5 **17.** 9 **18.** 1 **19.** 26000 **20.** 2400 **21.** 135000 **22.** 150000 **23.** 580 **24.** 390 **25.** 60 **26.** 50 **27.** 52,5 **28.** 33,6 **29.** 60 **30.** 62,5 **31.** 275 **32.** 3500 **33.** 480 **34.** 460 **35.** 4 **36.** 10 **37.** 30 **38.** 112 **39.** 74 **40.** 27,5 **41.** −1 **42.** 0,5 **43.** −10 **44.** −24 **45.** −4 **46.** 5 **47.** −3 **48.** 6 **49.** 4 **50.** 0,2 **51.** −15 **52.** 4,5

§ 4. Производная и её применение к исследованию функций

1. 0,5 **2.** −2,5 **3.** 0,25 **4.** −0,4 **5.** 5,875 **6.** −10,2 **7.** −0,6 **8.** −1,75 **9.** 2,25 **10.** −0,25 **11.** 0,4 **12.** 0,75 **13.** 5 **14.** 4 **15.** 2 **16.** −3 **17.** 6 **18.** 1 **19.** 39 **20.** 2,2 **21.** 28 **22.** 1,5 **23.** 0,6 **24.** 2,5 **25.** 3,5 **26.** 6,5 **27.** 7 **28.** 9 **29.** 4 **30.** 5 **31.** 6 **32.** 4 **33.** −5 **34.** −2 **35.** −4 **36.** 0 **37.** 8 **38.** 7 **39.** 3 **40.** 1 **41.** −1 **42.** −2 **43.** 2 **44.** 1 **45.** −3 **46.** 4 **47.** 6 **48.** 8,5 **49.** 4,5 **50.** −0,2 **51.** −3 **52.** −14 **53.** −1 **54.** 10 **55.** −244 **56.** −97 **57.** 42 **58.** 11,25 **59.** −38,25 **60.** −36 **61.** −5 **62.** 10,5 **63.** −1,5 **64.** 769 **65.** 4 **66.** 3 **67.** 0,2 **68.** −0,75 **69.** 9 **70.** 10 **71.** 15 **72.** 17 **73.** −7 **74.** 16 **75.** 31 **76.** 44 **77.** 72 **78.** 0,125 **79.** 20 **80.** 14

Нахождение экстремума функции, заданной формулой

1. 40 **2.** 6,25 **3.** 162 **4.** −76 **5.** −28 **6.** 10 **7.** −4 **8.** 16 **9.** 6 **10.** 1,6 **11.** 720 **12.** −245 **13.** −19,6 **14.** 11 **15.** −27 **16.** 165 **17.** 18 **18.** 15 **19.** −3 **20.** −7 **21.** 14 **22.** 8 **23.** −14 **24.** −5,5 **25.** 2,5 **26.** 1,75 **27.** 26 **28.** −1 **29.** 13 **30.** 5 **31.** 9 **32.** 0,25 **33.** 3 **34.** 7 **35.** 1 **36.** 3,5 **37.** 0,008 **38.** 0,0625 **39.** 243 **40.** 64 **41.** 2 **42.** 4 **43.** −2 **44.** −3 **45.** 53 **46.** −504 **47.** 6 **48.** 9 **49.** 146 **50.** 202 **51.** 733 **52.** 445 **53.** −0,5 **54.** 0,75 **55.** 0 **56.** 0,5625

§ 5. Первообразная и интеграл

1. $2x^2-3x-1$ **2.** $2x-\frac{x^2}{2}+7$ **3.** $\frac{x^3}{3}-x^2+4$ **4.** $\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}+x-6{,}4$

5. $\frac{x^6}{2}-\frac{5}{4}x^4+x^2-\frac{1}{4}$ **6.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2x-\frac{16}{3}$ **7.** $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}-\frac{57}{2}$

8. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{4}x^4-1004$ **9.** $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+405$

10. $0{,}75\sqrt[3]{x^4}+0{,}9\sqrt[9]{x^{10}}+8{,}35$ **11.** $3\ln|x|+\frac{5x^2+9}{2}$

12. $4\ln|x|-2x^3+6$ **13.** $\frac{x^2}{2}-x+2\ln\frac{|x|}{4}$ **14.** $\ln\frac{|x|}{2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+5$

15. $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^3}-3\ln\frac{|x|}{2}+\frac{7}{4}$ **16.** $\sin x-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{5}{4}$

17. $\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{9}\cos 9x+\frac{\sqrt{2}}{18}$ **18.** $-\frac{\cos 8x}{8}-\frac{\cos 10x}{10}+\frac{79}{8}-\frac{\sqrt{2}}{20}$

19. $\frac{\sin 11x}{11}-\frac{\sin 9x}{9}+\frac{\sqrt{2}}{99}$ **20.** $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{2}+1-\frac{\pi}{4}$

21. $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{49}{16}$ **22.** $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{24}\sin 12x-\frac{\sqrt{3}}{32}$

23. 19,5 **24.** 24,25 **25.** $\frac{20}{3}$ **26.** 16,5 **27.** $\frac{8}{3}$ **28.** $\frac{58}{3}$ **29.** $\frac{148}{3}$ **30.** $\frac{16}{3}$

31. $\frac{125}{3}$ **32.** 36 **33.** 28,5 **34.** 244,5 **35.** 8 **36.** 8,5 **37.** 44 **38.** 49,5 **39.** $\frac{4}{\pi}$

40. $\frac{16}{\pi}$ **41.** 7 **42.** 8 **43.** 9 **44.** 6 **45.** 0 **46.** −2 **47.** 7,5 **48.** 5,5 **49.** 2 **50.** 1

Раздел II. Геометрия

§ 1. Планиметрия

1. 7,5 **2.** 8 **3.** 18 **4.** 14,5 **5.** 10,5 **6.** 5 **7.** 11 **8.** 12 **9.** 4,5 **10.** 10,5 **11.** 3,5 **12.** 3,7 **13.** 4,5 **14.** 16 **15.** 6 **16.** 8,5 **17.** 16,5 **18.** 8 **19.** 35 **20.** 40 **21.** 5,5 **22.** 18 **23.** 48 **24.** 12,5 **25.** 52 **26.** 600 **27.** 32 **28.** 44 **29.** 38 **30.** 19 **31.** 20 **32.** 37,5 **33.** 16,5 **34.** 22 **35.** 9,5 **36.** 135 **37.** 64 **38.** 13 **39.** 80 **40.** 26 **41.** 15 **42.** 17 **43.** 78 **44.** 11,25 **45.** 252 **46.** 25,5 **47.** 49,5 **48.** 60,8 **49.** 2,9 **50.** 21 **51.** 12 **52.** 60 **53.** 24 **54.** 28 **55.** 30 **56.** 31,5 **57.** 328 **58.** 105 **59.** 50 **60.** 106 **61.** 58 **62.** 65 **63.** 10 **64.** 15,6 **65.** 14,5 **66.** 560 **67.** 306 **68.** 540 **69.** 1 **70.** 2,5 **71.** 3 **72.** 18 **73.** 73,5 **74.** 33 **75.** 9 **76.** 4 **77.** 14 **78.** 50 **79.** 90 **80.** 30 **81.** 22,5 **82.** 24 **83.** 17,5 **84.** −0,4 **85.** −15 **86.** 1,75 **87.** −25 **88.** −1,6 **89.** −1 **90.** 2 **91.** −0,5 **92.** 1,4 **93.** −1,125 **94.** −7,25 **95.** −0,75 **96.** −0,6 **97.** 1,7 **98.** 8,25 **99.** −1,25 **100.** 0,4 **101.** −23 **102.** −0,125 **103.** −10 **104.** −1,5 **105.** −7 **106.** −6 **107.** −22 **108.** 6 **109.** 24,5 **110.** 20 **111.** 5 **112.** 23 **113.** 21 **114.** 18 **115.** 36 **116.** 31 **117.** 54 **118.** 5 **119.** 15 **120.** 6,5 **121.** 2,5 **122.** −4,5 **123.** −3

124. 1,5 125. −2,5 126. 2,25 127. 7,75 128. 6,5 129. 3,5 130. 7 131. 12
132. 10 133. 14 134. 29 135. 25 136. 1 137. 27 138. −2 139. −8
140. −5 141. −9 142. 0 143. −4 144. −1 145. −11 146. 42 147. 28
148. 17 149. 34 150. 36 151. −49 152. 50 153. −50 154. 90 155. 120
156. 0,5 157. 0,25 158. 44 159. 57 160. 121 161. 68 162. 36 163. 56
164. 60 165. 132 166. 63 167. 110 168. 14 169. 150 170. 141 171. 49
172. 70 173. 54 174. 108 175. 102 176. 25 177. 17 178. 33 179. 26
180. 55 181. 27 182. 69 183. 6 184. 8 185. 2,4 186. 0,25 187. 1,875
188. 0,5 189. 5 190. 15 191. 9 192. 2,5 193. 4,8 194. 13,2 195. 0,4
196. 2,7 197. 6 198. 4 199. 0,6 200. 0,4 201. 0,75 202. 2 203. 1,5
204. 0,5 205. 3 206. 2,5 207. 1,8 208. 7 209. 8 210. 21 211. 135 212. 76
213. 129 214. 30 215. 32 216. 9 217. 24 218. 51 219. 19 220. 11
221. 0,6 222. 50 223. 16 224. 22 225. 23 226. 3,5 227. 65 228. 7,5
229. 1,4 230. 1,75 231. 2,2 232. 0,7 233. 100 234. 384 235. 8 236. 75
237. 82,5 238. 32,5 239. 56 240. 10 241. 13,5 242. 76 243. 19,5 244. 98
245. 2,29 246. 1,14 247. 9,38 248. 10,67 249. 4,38 250. 8,33 251. 140
252. 37,5 253. 135 254. 67,5 255. 52 256. 110 257. 35 258. 74 259. 71
260. 2 261. 9 262. 0,2 263. 38 264. 28,9 265. 48 266. 18 267. 84
268. 81 269. 96 270. 40 271. 80 272. 35 273. 116 274. 20 275. 25
276. 62,5 277. 121 278. 85 279. 126 280. 120 281. 23 282. 5 283. 3,6
284. 16 285. 1,5 286. 3 287. 15 288. 24 289. 12 290. 64 291. 2,5
292. 45 293. 14 294. 10 295. 61 296. 41 297. 20 298. 21 299. 36
300. 2,4 301. 3 302. 12 303. 4 304. 72 305. 34 306. 28 307. 31
308. 5,44

§2. Стереометрия

Нахождение элементов пирамиды и призмы

1. 7 2. 4 3. 2 4. 13 5. 7,5 6. 2,5 7. 6 8. 12 9. 10 10. 11 11. 1 12. 6
13. 12,5 14. 6,5 15. 4 16. 7 17. 5 18. 12 19. 17 20. 21 21. 13 22. 15
23. 25 24. 27 25. 26 26. 29 27. 34 28. 50 29. 12 30. 22 31. 192 32. 144
33. 18 34. 24 35. 504 36. 1740 37. 8 38. 5,2 39. 3 40. 10 41. 0,6 42. 4
43. 1,2 44. 3,36 45. 1,5 46. 4 47. 2,4 48. 1,25

Площадь поверхности и объём

1. 11 2. 400 3. 30 4. 24 5. 15 6. 26,5 7. 16 8. 53,75 9. 0,4 10. 2,8
11. 7,5 12. 11,5 13. 13,5 14. 59,5 15. 60 16. 66 17. 13 18. 16,5 19. 6,25
20. 64,75 21. 1,5 22. 144 23. 36 24. 562,5 25. 3 26. 7 27. 0,125 28. 5
29. 9 30. 2 31. 180 32. 320 33. 7 34. 5 35. 6 36. 10 37. 52 38. 468

39. 3,5 40. 17,5 41. 756 42. 3280 43. 720 44. 2160 45. 24 46. 392
47. 10 48. 25 49. 324 50. 187,5 51. 2,5 52. 4 53. 0,75 54. 18 55. 6 56. 4
57. 33 58. 78 59. 40 60. 83 61. 63 62. 234 63. 100 64. 210 65. 5,25
66. 9,875 67. 8 68. 54 69. 28 70. 5 71. 0,25 72. 0,05 73. 3 74. 0,6 75. 12
76. 24 77. 2 78. 0,8 79. 20 80. 28 81. 0,5 82. 0,0025 83. 32 84. 444
85. 288 86. 2024 87. 140 88. 384 89. 27 90. 72 91. 96 92. 310,8 93. 12,5
94. 1093,75 95. 39 96. 27,2 97. 5 98. 20,5 99. 50 100. 125,5 101. 0,32
102. 0,98 103. 0,81 104. 2,56 105. 182 106. 360 107. 4 108. 2 109. 69
110. 72 111. 42 112. 92 113. 8,5 114. 492 115. 56 116. 264 117. 0,45
118. 1008 119. 120 120. 0,0015

Раздел III. Задачи с практическим содержанием

§ 1. Вычислительные задачи

Числа и проценты

1. 33 2. 27 3. 16 4. 17 5. 59 6. 58 7. 9 8. 22 9. 8 10. 11 11. 8 12. 37
13. 60 14. 45 15. 30 16. 55 17. 3125 18. 6100 19. 18 20. 26 21. 78000
22. 91800 23. 24 24. 36 25. 2375 26. 14300 27. 2844 28. 2040 29. 96,54
30. 27,78 31. 56 32. 50 33. 230 34. 214 35. 304 36. 607 37. 520,8
38. 489,6 39. 931,3 40. 940,8 41. 24480 42. 26488 43. 9,5 44. 11 45. 9
46. 92 47. 801 48. 13 49. 105 50. 72 51. 28 52. 37 53. 15000 54. 16500
55. 50 56. 250 57. 10 58. 13 59. 1750 60. 3300 61. 5 62. 4 63. 2 64. 3
65. 270 66. 490 67. 26 68. 70 69. 471 70. 453 71. 1160 72. 620 73. 7,5
74. 31,5 75. 2,064 76. 3,9744 77. 13 78. 12 79. 18 80. 11

Выбор оптимального варианта

1. 2,6 2. 2,5 3. 2,2 4. 2,75 5. 3150 6. 12720 7. 26048 8. 39210 9. 515000
10. 105750 11. 102000 12. 765500 13. 12824 14. 9086 15. 7600 16. 42432
17. 4374 18. 5150 19. 7900 20. 9090 21. 14990 22. 25450 23. 37500
24. 65400 25. 850 26. 1560 27. 485 28. 831 29. 190 30. 340 31. 408
32. 1020 33. 217500 34. 140400 35. 53600 36. 70200 37. 3,5 38. 3 39. 5,5
40. 6,4 41. 73911 42. 89250 43. 95589 44. 134108,4 45. 820 46. 494
47. 1341 48. 757 49. 196 50. 585 51. 468 52. 495 53. 124 54. 134
55. 145 56. 126 57. 42845 58. 300000 59. 93140 60. 8292

§2. Задачи с физической формулировкой

1. 108 **2.** 20 **3.** 2334 **4.** 150 **5.** 2,8 **6.** 800 **7.** 40 **8.** 120 **9.** 5 **10.** 0,8 **11.** 80 **12.** 1,95 **13.** 24 **14.** 0,4 **15.** 84 **16.** 12 **17.** 0,75 **18.** 140 **19.** 180000 **20.** 1,15 **21.** 7 **22.** 600 **23.** 3 **24.** 0,125 **25.** 0,45 **26.** 1,25 **27.** 36 **28.** 54 **29.** 7,5 **30.** 3,75 **31.** 52,5 **32.** 6,25 **33.** 30 **34.** 120 **35.** 0,5 **36.** 87,5

§3. Текстовые задачи

1. 11 **2.** 8 **3.** 7 **4.** 10 **5.** 64 **6.** 72 **7.** 30 **8.** 60 **9.** 20 **10.** 5 **11.** 75 **12.** 18 **13.** 250 **14.** 40 **15.** 120 **16.** 100 **17.** 82,5 **18.** 17,5 **19.** 76 **20.** 18,4 **21.** 47,5 **22.** 14,4 **23.** 75 **24.** 86,4 **25.** 7,2 **26.** 12 **27.** 24 **28.** 14 **29.** 2,5 **30.** 4000 **31.** 15 **32.** 3 **33.** 4,5 **34.** 50 **35.** 86,5 **36.** 7,6 **37.** 135 **38.** 140 **39.** 7,5 **40.** 90 **41.** 8 **42.** 1250 **43.** 37,5 **44.** 25 **45.** 10 **46.** 6 **47.** 560 **48.** 270 **49.** 11000 **50.** 5500 **51.** 4140 **52.** 0,00144 **53.** 30 **54.** 32,5 **55.** 4 **56.** 20 **57.** 80 **58.** 87,5 **59.** 32 **60.** 132,5 **61.** 40,8 **62.** 50

§4. Теория вероятности

1. 0,993 **2.** 0,985 **3.** 0,025 **4.** 0,72 **5.** 0,32 **6.** 0,275 **7.** 0,3125 **8.** 0,64 **9.** 0,013 **10.** 0,006 **11.** 0,074 **12.** 0,1225 **13.** 0,1 **14.** 0,12 **15.** 0,3 **16.** 0,225 **17.** 0,17 **18.** 0,083 **19.** 0,46 **20.** 0,36 **21.** 0,425 **22.** 0,525 **23.** 0,48 **24.** 0,38 **25.** 600 **26.** 49 **27.** 38 **28.** 17 **29.** 21 **30.** 23 **31.** 11 **32.** 0,625 **33.** 0,7 **34.** 0,6 **35.** 0,5 **36.** 0,488 **37.** 0,104 **38.** 0,16 **39.** 0,84 **40.** 0,14 **41.** 0,08 **42.** 0,833 **43.** 0,917 **44.** 0,2 **45.** 0,25 **46.** 0,5 **47.** 0,6 **48.** 0,125 **49.** 0,25 **50.** 0,75 **51.** 0,875 **52.** 0,375 **53.** 0,5 **54.** 0,0625 **55.** 0,6875 **56.** 0,73728 **57.** 0,3483 **58.** 0,8208 **59.** 0,1 **60.** 0,2 **61.** 0,4 **62.** 0,6 **63.** 0,1875 **64.** 0,25 **65.** 0,018 **66.** 0,045 **67.** 0,07 **68.** 0,06 **69.** 0,19 **70.** 0,13 **71.** 0,648 **72.** 0,28 **73.** 0,0756 **74.** 0,0153 **75.** 0,545 **76.** 0,899 **77.** 0,602 **78.** 0,771 **79.** 0,576 **80.** 0,5125 **81.** 29 **82.** 0,378 **83.** 0,496 **84.** 4 **85.** 3 **86.** 0,01097 **87.** 0,117 **88.** 0,26 **89.** 0,44 **90.** 0,632 **91.** 0,4872 **92.** 0,3125 **93.** 0,625 **94.** 0,8 **95.** 0,24 **96.** 0,1875 **97.** 0,67 **98.** а) 0,5; б) 0,25 **99.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{5}{27}$ **100.** 0,475 **101.** 0,65 **102.** 0,25 **103.** 0,75 **104.** 0,09 **105.** 0,34375

§5. Геометрические задачи с практическим содержанием

1. 1010 **2.** 45,9 **3.** 75 **4.** 9 **5.** 7,5 **6.** 144 **7.** 3750 **8.** 2160 **9.** 210 **10.** 96 **11.** 3,2 **12.** 4,8 **13.** 6,7 **14.** 10 **15.** 3,75 **16.** 10,2 **17.** 8,5 **18.** 4,5 **19.** 67,5 **20.** 2,5 **21.** 4,25 **22.** 1,5 **23.** 2 **24.** 0,5 **25.** 24 **26.** 310000 **27.** 5,5 **28.** 21

29. 39 **30.** 40 **31.** 74 **32.** 58 **33.** 3,5 **34.** 72 **35.** 93,75 **36.** 675 **37.** 64 **38.** 91 **39.** 42 **40.** 49 **41.** 50 **42.** 26 **43.** 100 **44.** 85 **45.** 1,25 **46.** 6,25 **47.** 41 **48.** 37 **49.** 0,8 **50.** 4,5 **51.** 15 **52.** 6 **53.** 10 **54.** 12,5 **55.** 13800 **56.** 5 **57.** 33,3 **58.** 20,4 **59.** 374 **60.** 2,25 **61.** 54 **62.** 160 **63.** 55000 **64.** 7770 **65.** 13,8 **66.** 84 **67.** 165 **68.** 226 **69.** 45 **70.** 7

Для заметок