Д.А. Мальцев,

А.А. Мальцев,

Л.И. Мальцева

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019. Книга 2

Профильный уровень

Решебник

Издатель Мальцев Д.А.

Ростов-на-Дону

Народное образование

Москва

2019

Содержание

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами, начиная с третьего (т.е. тестов №3, №5 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. ЕГЭ 2019. Книга 2. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания к решениям задач №16 (планиметрия) и №19 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами. Решения заданий с развёрнутым ответом теста № 1 приведены в книге «Математика. ЕГЭ 2019. Книга 2. Профильный уровень». Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем.

Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Тест №11

13. а) Решите уравнение $27^x - 8 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{5-x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1{,}7; 2]$.

Решение.

а) Введём новую неизвестную $t = 3^x$, $t > 0$. Относительно неизвестной t исходное уравнение имеет вид: $t^3 - 8 \cdot 3 \cdot t + 5 \cdot 3^5 \cdot t^{-1} = 0$, $t^3 - 72t + \dfrac{1215}{t} = 0$, $t^4 - 72t^2 + 1215 = 0$. Решим данное биквадратное уравнение: $D = 72^2 - 4 \cdot 1215 = 5184 - 4860 = 324$, $t^2 = \dfrac{72 \pm 18}{2}$, $t^2 = 27$ или $t^2 = 45$. Отсюда, учитывая что $t > 0$, имеем: $t = 3^{\frac{3}{2}}$ или $t = 3\sqrt{5}$. Возвращаясь к неизвестной x, получаем: $3^x = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ или $3^x = 3\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow x = \log_3(3\sqrt{5}) = 1 + \log_3\sqrt{5} = 1 + 0{,}5\log_3 5$. Таким образом, корнями исходного уравнения являются $x = 1{,}5$ и $x = 1 + 0{,}5\log_3 5$.

б) Произведём отбор корней, принадлежащих отрезку $[1{,}7; 2]$. Корень $x = 1{,}5$, очевидно, не принадлежит этому отрезку. Корень $x = 1 + 0{,}5\log_3 5$ принадлежит отрезку $[1{,}7; 2]$ в том случае, если $0{,}7 \leqslant 0{,}5\log_3 5 \leqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{7}{5} \leqslant \log_3 5 \leqslant 2$. Покажем, что эти неравенства справедливы. Имеем: $\dfrac{7}{5} \leqslant \log_3 5 \leqslant 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{7}{5}} \leqslant 5 \leqslant 3^2$. Неравенство $5 \leqslant 3^2$ очевидно, а чтобы проверить неравенство $3^{\frac{7}{5}} \leqslant 5$, достаточно возвести обе его части в степень 5, получив равносильное ему неравенство $3^7 \leqslant 5^5$, $2187 \leqslant 3125$, которое верно. Следовательно, корень $x = 1 + 0{,}5\log_3 5$ принадлежит отрезку $[1{,}7; 2]$.

Ответ: а) $x = 1{,}5$, $x = 1 + 0{,}5\log_3 5$; б) $1 + 0{,}5\log_3 5$.

14. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, которая содержит прямую BD_1 и параллельна прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AB = 6$, $AA_1 = 8$.

Решение.

а) Пусть K и L – точки пересечения плоскости α с прямыми AD и CD, а M и N – точки пересечения прямых D_1K и D_1L с рёбрами AA_1 и CC_1 соответственно, см. рисунок 1. Так как плоскость α параллельна прямой AC, а KL – это линия пересечения плоскости α с плоскостью ABC, то прямая KL параллельна прямой AC. Поэтому $ABLC$ – параллелограмм, и, значит, $AB = CL$. А поскольку $AB = C_1D_1$, то $C_1D_1 = CL$. Следовательно, треугольники C_1D_1N и CLN равны по стороне и двум углам. Поэтому $C_1N = CN$, т.е. точка N – середина ребра CC_1.

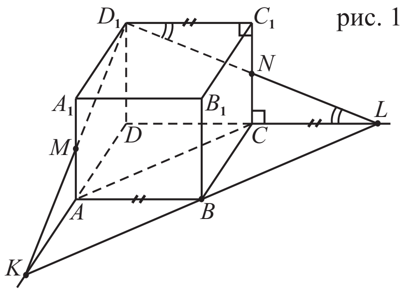


рис. 1

Аналогично, исходя из того, что $A_1D_1 = BC = AK$, доказывается, что точка M – середина ребра AA_1.

Сечением параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α является четырёхугольник BMD_1N. Так как по условию этот четырёхугольник ромб, то $D_1M = D_1N$. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники D_1MA_1 и D_1NC_1 равны: у них равны гипотенузы $D_1M = D_1N$ и катеты $A_1M = C_1N$ (в силу того, что M и N – середины равных рёбер AA_1 и CC_1). Таким образом, $A_1D_1 = C_1D_1$, т.е. четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ – квадраты, что и требовалось доказать.

б) Угол между плоскостями α и BCC_1 обозначим через φ. Найдём косинус этого угла, воспользовавшись равенством:

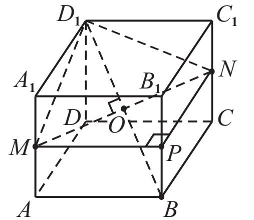
$$S_{D_1MN} \cdot \cos\varphi = S_{\text{проекц.}} \quad (*),$$

где S_{D_1MN} – площадь треугольника D_1MN, лежащего в плоскости α, а

$S_{\text{проекц.}}$ – площадь проекции этого треугольника на плоскость BCC_1.

Проекцией точки D_1 на плоскость BCC_1 является точка C_1, проекцией точки M на плоскость BCC_1 является точка P, см. рисунок 2, а точка N сама лежит в плоскости BCC_1. Так как точки M и N – середины рёбер AA_1 и CC_1 (доказано в пункте а), то $C_1N = B_1P$. Отсюда следует, что C_1PN – прямоугольный треугольник, в котором $C_1N = \frac{1}{2}CC_1 = 4$, $PN = BC = 6$: напомним, в пункте а) доказано, что $BC = AB$, а по условию $AB = 6$, $AA_1 = 8$.

рис. 2



Таким образом, площадь проекции треугольника D_1MN на плоскость BCC_1, которой является треугольник C_1PN, равна

$$S_{\text{проекц.}} = \frac{1}{2}C_1N \cdot PN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12.$$

Заметим, что отрезок D_1O, где точка O – середина диагонали BD_1 параллелепипеда, является высотой треугольника D_1MN (D_1MBN – ромб и, значит, $MN \perp BD_1$). Поэтому площадь треугольника D_1MN равна $S_{D_1MN} = \frac{1}{2}MN \cdot D_1O = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}BD_1 = \frac{1}{4}AC \cdot BD_1$. Так как $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = 6\sqrt{2}$, а $BD_1 = \sqrt{BD^2+DD_1^2} = \sqrt{AB^2+AD^2+DD_1^2} = \sqrt{6^2+6^2+8^2} = 2\sqrt{34}$, то $S_{D_1MN} = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{34} = 6\sqrt{17}$.

Подставляя в равенство $(*)$ найденные значения $S_{\text{проекц.}}$ и S_{D_1MN}, получаем: $6\sqrt{17} \cdot \cos\varphi = 12$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{17}}$, $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Ответ: $\arccos\frac{2}{\sqrt{17}}$

15. Решите неравенство:

$$\log_9\Big(\big(5^{-x^2} - 5^{-4}\big)\cdot\big(5^{-x^2} - 1\big)\Big) + \log_9\frac{5^{-x^2} - 5^{-4}}{5^{-x^2} - 1} \leqslant \log_3\big(5^{-x^2+5} - 5^{-9}\big).$$

Решение.

При замене неизвестной $t = 5^{-x^2}$, $0 < t \leqslant 1$, данное в условии неравенство записывается в виде:

$$\log_9\left((t-5^{-4})\cdot(t-1)\right)+\log_9\frac{t-5^{-4}}{t-1}\leqslant\log_3\left(5^5t-5^{-9}\right)\quad(*).$$

Так как $t-1\leqslant 0$, то неравенство $(*)$ определено при тех значениях t, для которых:

$$\begin{cases} t\neq 1,\\ t-5^{-4}<0,\\ 5^5t-5^{-9}>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t<5^{-4},\\ t>5^{-14}.\end{cases}$$

При этом $\log_9\left((t-5^{-4})\cdot(t-1)\right)+\log_9\dfrac{t-5^{-4}}{t-1}=\log_9(t-5^{-4})^2=$ $=2\log_9(5^{-4}-t)=\log_3(5^{-4}-t)$. Таким образом, неравенство $(*)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} 5^{-14}<t<5^{-4}\\ \log_3\left(5^{-4}-t\right)\leqslant\log_3\left(5^5t-5^{-9}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 5^{-14}<t<5^{-4}\\ 5^{-4}-t\leqslant 5^5t-5^{-9}\end{cases}$$

Преобразуем второе неравенство последней системы: $5^{-4}+5^{-9}\leqslant t\cdot(5^5+1)$, $5^{-9}\cdot(5^5+1)\leqslant t\cdot(5^5+1)$, $t\geqslant 5^{-9}$. Отсюда получаем, что решением неравенства $(*)$ являются $5^{-9}\leqslant t<5^{-4}$. Возвращаясь к неизвестной x, имеем: $5^{-9}\leqslant 5^{-x^2}<5^{-4}\ \Leftrightarrow\ -9\leqslant -x^2<-4\ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 4<x^2\leqslant 9\ \Leftrightarrow\ x\in[-3;-2)\cup(2;3]$.

Ответ: $[-3;-2)\cup(2;3]$

16. Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Биссектриса угла ACH пересекает гипотенузу AB в точке P. Точка O — центр описанной окружности треугольника APC.

а) Докажите, что прямые AO и BO перпендикулярны.

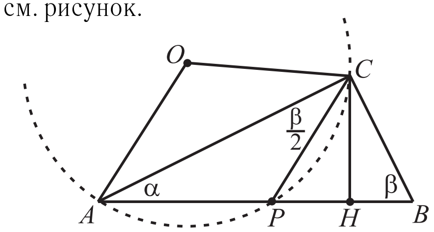
б) Найдите площадь треугольника AOC, если $AB=18$, $\cos\angle A=0{,}8$.

Решение.

а) Если $\angle AOB=90^\circ$ (что и требуется нам доказать), то точка O лежит на окружности, построенной на гипотенузе AB, как на диаметре. То есть точка O лежит на описанной окружности треугольника ABC. А в этом случае $\angle AOC+\angle ABC=180^\circ$ (как противоположные углы четырёхугольника $ABCO$, вписанного в окружность).

Заметим, что приведённые выше утверждения справедливы и в обратную сторону: если $\angle AOC+\angle ABC=180^\circ$, то точка O лежит на описанной окружности $\triangle ABC$ и, стало быть, $\angle AOB=90^\circ$. Поэтому нам достаточно доказать равенство $\angle AOC+\angle ABC=180^\circ$.

Пусть α и β — градусные меры углов $\triangle ABC$ при вершинах A и B соответственно. Тогда по известному свойству высоты к гипотенузе прямоугольного треугольника $\angle ACH=\beta$. А поскольку CP — биссектриса угла ACH, то $\angle ACP=\dfrac{\beta}{2}$. Из треугольника APC получаем, что $\angle APC=$ $=180^\circ-\alpha-\dfrac{\beta}{2}$, см. рисунок.



Градусная мера дуги описанной окружности $\triangle APC$, на которую опирается угол APC, равна $2\angle APC=2\cdot(180^\circ-\alpha-\dfrac{\beta}{2})=360^\circ-2\alpha-\beta$. А градусная мера дуги APC этой окружности равна $360^\circ-(360^\circ-2\alpha-\beta)=$ $=2\alpha+\beta$. Следовательно, $\angle AOC=2\alpha+\beta$ (как центральный угол, стягивающий дугу APC). Осталось заметить, что $\angle AOC+\angle ABC=2\alpha+\beta+$ $+\beta=2(\alpha+\beta)=2\cdot 90^\circ=180^\circ$. Тем самым, равенство $\angle AOC+\angle ABC=$ $=180^\circ$, а с ним и утверждение пункта а), доказано.

б) Площадь треугольника AOC найдём по формуле: $S_{AOC}=$ $=\dfrac{1}{2}AO\cdot CO\cdot\sin\angle AOC=\dfrac{1}{2}AO^2\cdot\sin\angle AOC$ ($CO=AO$ — как радиусы описанной окружности $\triangle ACP$). Так как $\angle AOC=180^\circ-\beta$ (доказано в пункте а), то $\sin\angle AOC=\sin\beta$, а $\cos\angle AOC=-\cos\beta$. Найдём длину отрезка AO, применив теорему косинусов к $\triangle AOC$: $AC^2=AO^2+CO^2-$ $-2AO\cdot CO\cdot\cos\angle AOC=2AO^2+2AO^2\cdot\cos\beta$, откуда $AO^2=\dfrac{AC^2}{2(1+\cos\beta)}$. Остаётся лишь заметить, что поскольку $AC=AB\cdot\cos\alpha$, то $AO^2=\dfrac{AB^2\cdot\cos^2\alpha}{2(1+\cos\beta)}$, и подставив это выражение в формулу $S_{AOC}=$ $=\dfrac{1}{2}AO^2\cdot\sin\beta$, провести вычисления.

Имеем: $S_{AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{AB^2\cdot\cos^2\alpha}{2(1+\cos\beta)}\cdot\sin\beta\quad(*)$. Так как по условию $\cos\alpha=0{,}8$, то $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=0{,}6$. А поскольку $\alpha+\beta=90^\circ$, то $\sin\beta=\cos\alpha$, $\cos\beta=\sin\alpha$. Подставляя в формулу $(*)$ $AB=18$, $\cos\alpha=$ $=\sin\beta=0{,}8$ и $\cos\beta=0{,}6$, получаем: $S_{AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18^2\cdot 0{,}8^3}{2\cdot(1+0{,}6)}=$

$= \dfrac{9^2\cdot 2^2\cdot 8^3\cdot 10^{-3}}{4\cdot 1{,}6} = \dfrac{81\cdot 2^2\cdot (2^3)^3\cdot 10^{-3}}{2^2\cdot 2^4\cdot 10^{-1}} = \dfrac{81\cdot 2^{11}\cdot 10^{-2}}{2^6} = 81\cdot 32\cdot 10^{-2} =$ $= 25{,}92.$

Ответ: 25,92

17. Мистер Джонсон купил акции некоторой компании по цене 1 тысяча долларов за 1 шт. Рыночная цена этих акций ежегодно увеличивается на одну и ту же величину δ тысяч долларов за 1 шт. Но за счёт инфляции, которая составляет 4% в год, реальная стоимость акций (т.е. покупательская способность денег, которые можно получить, продав акции) в конце N-го года составляет $0{,}96^N$ от их рыночной цены. Мистер Джонсон хочет продать свои акции в тот момент, когда они будут обладать наибольшей реальной стоимостью. В результате расчётов он вычислил, что для этого необходимо продать акции в конце седьмого года. Определите, при каких значениях δ это возможно.

Решение.

Рыночная цена акций в конце N-ого года равна $(1+\delta N)$ тыс. долл. за 1 шт. Обозначим через $S_N = 0{,}96^N(1+\delta N)$ реальную стоимость акций в конце N-го года. Акции будут обладать наибольшей реальной стоимостью в N-ом году в том случае, если $S_N > S_{N-1}$, а $S_{N+1} < S_N$. По условию задачи в конце седьмого года акции будут обладать наибольшей реальной стоимостью, т.е. выполняются условия $\dfrac{S_7}{S_6} > 1$ (1) и $\dfrac{S_8}{S_7} < 1$ (2). Решим неравенство (1): $\dfrac{S_7}{S_6} > 1$, $\dfrac{0{,}96^7(1+7\delta)}{0{,}96^6(1+6\delta)} > 1$, $\dfrac{24}{25}\cdot\dfrac{1+7\delta}{1+6\delta} > 1$, $24(1+7\delta) > 25(1+6\delta)$, $24+168\delta > 25+150\delta$, $18\delta > 1$, $\delta > \dfrac{1}{18}$. Решая аналогично неравенство (2), получаем, что $\delta < \dfrac{1}{17}$.

Таким образом, искомые значения δ такие, что $\dfrac{1}{18} < \delta < \dfrac{1}{17}$.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geqslant 2 \\ \sqrt{x-2} > a \\ 2x \leqslant 3a+6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;6]$.

Решение.

Если $a \leqslant 0$, то неравенство $ax \geqslant 2$ не выполнено ни при каком $x \in [3;6]$,

т.е. данная в условии система не имеет решений на отрезке $[3;6]$. Следовательно, все искомые значения a удовлетворяют условию $a > 0$.

При $a > 0$ неравенство $ax \geqslant 2$ равносильно неравенству $x \geqslant \dfrac{2}{a}$, а неравенство $\sqrt{x-2} > a$ равносильно неравенству $x > a^2+2$. Поэтому исходная система имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;6]$ в том и только том случае, если на этом отрезке имеет хотя бы одно решение следующая система:

$$(*)\quad \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{a} \\ x > a^2+2 \\ x \leqslant \dfrac{3a+6}{2}. \end{cases}$$

Для того, чтобы система $(*)$ имела хоть какое-то решение (не обязательно их отрезка $[3;6]$), необходимо и достаточно, чтобы пересечение множеств $\left\{x\colon x \geqslant \dfrac{2}{a}\right\}$ и $\{x\colon x > a^2+2\}$ с множеством $\left\{x\colon x \leqslant \dfrac{3a+6}{2}\right\}$ было непустым. Это достигается в том и только том случае, если выполнены неравенства: $\dfrac{2}{a} \leqslant \dfrac{3a+6}{2}$ (i) и $a^2+2 < \dfrac{3a+6}{2}$ (ii).

А для того, чтобы хотя бы одно решение системы $(*)$ принадлежало отрезку $[3;6]$, необходимо и достаточно, чтобы помимо неравенств (i), (ii) также выполнялись неравенства: $\dfrac{2}{a} \leqslant 6$, $a^2+2 < 6$, $\dfrac{3a+6}{2} \geqslant 3$. Неравенство $\dfrac{3a+6}{2} \geqslant 3$ выполняется для всех $a > 0$. Поэтому присоединяя к неравенствам (i), (ii) неравенства $\dfrac{2}{a} \leqslant 6$ и $a^2+2 < 6$, а также условие $a > 0$, получаем систему, которой удовлетворяют все искомые значения a и только они:

$$\begin{cases} a > 0 & \\ \dfrac{2}{a} \leqslant 6 & (1) \\ a^2+2 < 6 & (2) \\ \dfrac{2}{a} \leqslant \dfrac{3a+6}{2} & (3) \\ a^2+2 < \dfrac{3a+6}{2} & (4) \end{cases}$$

Решением неравенства (1) при условии $a > 0$ являются $a \geqslant \dfrac{1}{3}$. Решением неравенства (2) при условии $a > 0$ являются $0 < a < 2$. Неравенство (3) при условии $a > 0$ равносильно неравенству $a(3a+6) \geqslant 2\cdot 2$, $3a^2+6a-4 \geqslant 0$, поэтому его решением с учётом условия $a > 0$ являются

$a \geqslant \dfrac{-3+\sqrt{21}}{3}$. Неравенство $a^2+2 < \dfrac{3a+6}{2}$ равносильно неравенству $2a^2-3a-2<0$, поэтому его решением с учётом условия $a>0$ являются $0<a<2$. Так как $\dfrac{\sqrt{21}-3}{3} > \dfrac{4-3}{3} = \dfrac{1}{3}$, то пересекая решения неравенств $(1)-(4)$, т.е. множества $a \geqslant \dfrac{1}{3}$, $a \geqslant \dfrac{\sqrt{21}-3}{3}$ и $0<a<2$, мы получаем, что искомыми значениями a являются $a \in \left[\dfrac{\sqrt{21}-3}{3};2\right)$.

19. На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 180?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 18?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 18, может быть написано на доске?

Решение.

а) Заметим, что $1+2+3+\ldots+99+100 = \dfrac{1+100}{2}\cdot 100 = 5050$. Если в этой сумме число 100 заменить на число 180, то она увеличится на 80 и станет равна 5130. Поэтому ответ в пункте а) — да (набор чисел $1,2,3,\ldots,98,99,180$ даёт такой пример).

б) Если на доске нет числа 18, то сумма 100 написанных чисел не меньше, чем $1+2+\ldots+17+19+\ldots+100+101 = \dfrac{1+101}{2}\cdot 101 - 18 = 5151-18 = 5133$. Но $5133>5130$, а по условию сумма написанных чисел равна 5130. Поэтому не могло случиться так, что на доске нет числа 18. Ответ в пункте б) — нет.

в) Все кратные 18 числа в промежутке от 1 до 100 это числа $18,36,54,72,90$. Если на доске отсутствуют три из этих чисел, то сумма всех ста чисел, написанных на доске, не меньше, чем: $(1+2+3+\ldots+100)-54-72-90+101+102+103 = 505-216+306 = 5140$. А это противоречит тому, что сумма написанных на доске чисел равна 5130. Поэтому на доске отсутствуют не более чем два числа из чисел $18,36,54,72,90$. Построим пример, показывающий, что на доске могут отсутствовать числа 72 и 90:

$$(1+2+\ldots+102)-72-90 = \frac{1+102}{2}\cdot 102 - 162 = 5091.$$

Так как $5130-5091=39$, то взяв в выражении $(1+2+\ldots+102)-72-90$ вместо 102 число $102+39=141$, мы получим выражение, значение которого равно 5130. Таким образом, числа

$$\underbrace{1,2,\ldots,71}_{71\text{ число}},\ \underbrace{73,74,\ldots,89}_{17\text{ чисел}},\ \underbrace{91,92,\ldots,100}_{10\text{ чисел}},101,141$$

дают пример ста различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130 и среди которых есть лишь три числа, кратные 18: числа $18,36,54$ (числа 72 и 90 отсутствуют). Так как меньше трёх чисел, кратных 18, на доске не могло быть (из пяти чисел $18,36,54,72,90$ на доске могут отсутствовать лишь два), а приведённый выше пример показывает, что могли быть написаны числа, среди которых лишь три числа кратны 18, то ответ в пункте в) — 3.

Ответ: а) да; б) нет; в) 3.

Тест №13

13. а) Решите уравнение $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \sqrt{3}\sin x + \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-2\pi;\pi)$.

Решение.

а) По формуле косинуса разности имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x.$$

А поскольку $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то данное в условии уравнение упрощается к виду: $\cos x+\sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}\sin x+\cos^2 x$, $\cos x\cdot(\cos x-1)=0$, откуда $\cos x=0$ или $\cos x=1$.

Корнями уравнения $\cos x=0$ являются $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, корнями уравнения $\cos x=1$ являются $x=2\pi n$, $n\in Z$.

б) $-2\pi < \dfrac{\pi}{2}+\pi n < \pi$, $n\in Z \Leftrightarrow -2 < \dfrac{1}{2}+n < 1$, $n\in Z \Leftrightarrow -2{,}5<n<0{,}5$, $n\in Z \Leftrightarrow n=-2$ или $n=-1$ или $n=0$. Таким образом, среди точек $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ промежутку $(-2\pi;\pi)$ принадлежат точки $x=-\dfrac{3\pi}{2}$, $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

$-2\pi<2\pi n<\pi$, $n\in Z \Leftrightarrow -1<n<\dfrac{1}{2}$, $n\in Z \Leftrightarrow n=0$. Поэтому среди точек $x=2\pi n$, $n\in Z$ промежутку $(-2\pi;\pi)$ принадлежит лишь точка $x=0$.

Ответ: а) $x=2\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ б) $-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}$

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $ABCDE$ с вершиной E точки M и $N-$ середины сторон основания AB и AD, точка $K-$ середина бокового ребра EC. Плоскость MNK пересекает высоту пирамиды EH в точке P.

а) Докажите, что точка P делит высоту EH в отношении $3:1$, считая от вершины.

б) Найдите отношение объёмов двух частей, на которые плоскость MNK делит пирамиду $ABCDE$.

Решение.

а) Пусть L — точка пересечения прямой MN с диагональю AC. Так как прямая KL лежит в плоскости MNK, то точка пересечения отрезков KL и EH является той самой точкой P, в которой плоскость MNK пересекает высоту пирамиды EH, см. рисунок 1. Заметим, что поскольку $MN-$ средняя линия $\triangle ABD$, то $AL = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{4}AC$. Чтобы найти отношение $EP:PH$, в плоскости треугольника AEC через точку K проведём прямую параллельно AC, и точку пересечения этой прямой с высотой EH обозначим через T, см. рисунок 2.

рис. 1

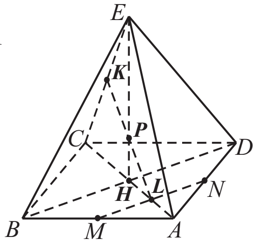
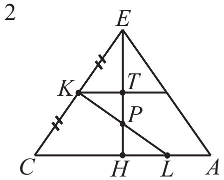


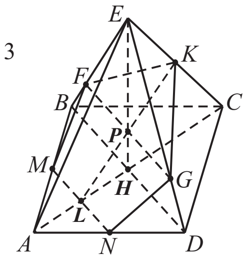
рис. 2



Так как KT — средняя линия $\triangle CEH$, то $KT = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{4}AC$. А поскольку $LH = AH - AL = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}AC$, то $KT = LH$. Следовательно, треугольники KTP и LHP равны и, значит, $PH = PT$. Отсюда получаем, что $PH = \frac{1}{2} \cdot TH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}EH = \frac{1}{4}EH$, $EP = EH - PH = \frac{3}{4}EH$, $EP:PH = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1$, что и требовалось доказать.

б) Так как плоскость MNK параллельна прямой BD, она будет пересекать плоскость BDE по линии FG, которая также параллельна прямой BD, см. рисунок 3.

рис. 3



А поскольку точка P делит отрезок EH в отношении $3:1$, то $\frac{EF}{BE} = \frac{EG}{DE} = \frac{EP}{EH} = \frac{3}{4}$.

Сечением пирамиды $ABCDE$ плоскостью MNK является пятиугольник $MNGKF$, составленный из трапеции $MNGF$ и треугольника FGK. Поэтому многогранник, являющийся частью пирамиды, расположенной «выше» плоскости сечения MNK, составлен из треугольной пирамиды $AMNE$, четырёхугольной пирамиды $MNGFE$ и треугольной пирамиды $FGKE$.

Пусть V — объём пирамиды $ABCDE$. Выразим через V объёмы пирамид $AMNE$, $FGKE$ и $MNGFE$, обозначив их через V_1, V_2 и V_3 соответственно. Так как пирамида $AMNE$ имеет ту же высоту, что и пирамида $ABCDE$, то отношение объёмов этих пирамид равно отношению площадей их оснований, т.е. $\frac{V_1}{V} = \frac{S_{AMN}}{S}$, где S — площадь квадрата $ABCD$. Если $AB = a$, то $S = a^2$, $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$. Следовательно, $\frac{S_{AMN}}{S} = \frac{1}{8}$, откуда $V_1 = \frac{1}{8}V$.

Чтобы найти объём V_2 пирамиды $EFGK$, заметим, что он ровно вдвое меньше объёма пирамиды $EFGC$: у этих пирамид общее основание EFG, а отношение высот, проведённых к этому основанию из вершин K и C, равно отношению $CE:KE = 2:1$. А объём пирамиды $EFGC$ составляет $\frac{9}{16}$ от объёма пирамиды $BDEC$: у этих пирамид общая высота, проведённая к плоскости BDE из вершины C, а отношение площадей оснований FGE и BDE равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников, т.е. равно $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Остаётся лишь заметить, что объём пирамиды $BDEC$ равен $\frac{V}{2}$. Из указанных выше соотношений между объёмами пирамид $EFGK, EFGC$ и $BDEC$ получаем, что объём пирамиды $EFGK$

равен $V_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{16}\cdot\frac{V}{2}\right)=\frac{9V}{64}$.

Нам остаётся найти объём V_3 пирамиды $MNGFE$. Заметим, что эта пирамида имеет общую высоту с пирамидой $EFGK$, проведённую из вершины E к плоскости MNK. Поэтому отношение объёмов этих пирамид равно отношению площадей их оснований $MNGF$ и FGK. Для площадей трапеции $MNGF$ и треугольника FGK имеем следующие выражения: $S_{MNGF}=\frac{1}{2}(MN+FG)\cdot LP$, $S_{FGK}=\frac{1}{2}FG\cdot KP$ (отрезок KP – медиана и высота равнобедренного треугольника FGK, поэтому $KL\perp FG$). Так как $MN=\frac{1}{2}BD$ – средняя линия $\triangle ABD$, а $FG=\frac{3}{4}BD$ – из подобия $\triangle FGE$ и $\triangle BDE$ с коэффициентом подобия $3/4$, то

$$\frac{S_{MNGF}}{S_{FGK}}=\frac{MN+FG}{FG}\cdot\frac{LP}{KP}=\frac{(1/2)+(3/4)}{3/4}\cdot\frac{LP}{KP}=\frac{5}{3}\cdot\frac{LP}{KP}.$$

Остаётся лишь заметить, что $KP=LP$ (это следует из равенства треугольников KPT и LPH, см. пункт а), рисунок 2), и для отношения объёмов V_3 и V_2 получаем: $\frac{V_3}{V_2}=\frac{S_{MNGF}}{S_{FGK}}=\frac{5}{3}$. Значит, $V_3=\frac{5}{3}V_2=$ $=\frac{5}{3}\cdot\frac{9V}{64}=\frac{15V}{64}$.

Итак, объём многогранника, являющегося частью пирамиды $ABCDE$, расположенной «выше» плоскости сечения MNK, равен $V_1+V_2+V_3=$ $=\frac{V}{8}+\frac{9V}{64}+\frac{15V}{64}=\frac{8V+9V+15V}{64}=\frac{V}{2}$. Следовательно, плоскость MNK делит объём пирамиды $ABCDE$ пополам, т.е. в отношении $1:1$.

Ответ: $1:1$ (или 1)

15. Решите неравенство $\dfrac{(4^x-3)\cdot\log_4(17-2^x)}{\log_{16}x-\log_4 2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\geqslant 0.$

Решение.

Данное неравенство будем решать «методом интервалов».

1) Областью определения исходного неравенства являются те значения x, для которых выполнена следующая система:

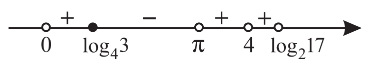
$$\begin{cases}17-2^x>0\\ \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ \log_{16}x\neq\log_4 2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<\log_2 17\\ x\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z\\ \log_{16}x\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$\log_{16}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=16^{\frac{1}{2}}=4$. Заметим, что $4<\log_2 17$. Также заметим, что из точек $x=\pi+2\pi k$, где $k\in Z$, в интервал $(0;\log_2 17)$ попадает лишь точка $x=\pi$ (если $k\geqslant 1$, то $\pi+2\pi k\geqslant 3\pi>5>\log_2 17$).
Поэтому областью определения данного в условии неравенства являются $x\in(0;\pi)\cup(\pi;4)\cup(4;\log_2 17)$.

2) Найдём нули выражений 4^x-3, $\log_4(17-2^x)$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$: $4^x-3=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\log_4 3$; $\log_4(17-2^x)=0\Leftrightarrow 17-2^x=1\Leftrightarrow x=4$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\pi k$, $x=2\pi k, k\in Z$ (отметим, что ни одна из точек $x=2\pi k, k\in Z$ не входит в область определения неравенства).

3) Все точки, в которых левая часть неравенства равна нулю или не существует, разбивают область определения неравенства на интервалы, внутри которых левая часть неравенства знакопостоянна (т.е. положительна или отрицательна на всём интервале).

Нанесём на числовую ось область определения неравенства и указанные выше точки, см. рисунок.



(точки, не входящие в область определения, изображены «выколотыми»).

Внутри интервала $(0;\log_4 3)$ оба выражения 4^x-3 и $\log_{16}x-\log_4 2$ отрицательны, а выражения $\log_4(17-2^x)$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ положительны (т.к. при $x\in(0;\log_4 3)$ имеем: $x<\log_4 3<1\Rightarrow 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$, $17-2^x>15$).
Поэтому внутри интервала $(0;\log_4 3)$ левая часть данного в условии неравенства положительна, т.е. при $x\in(0;\log_4 3]$ это неравенство выполнено. При переходе через точки $x=\log_4 3$ и $x=\pi$ левая часть неравенства меняет знаки на противоположные, т.к. в этих точках меняет знак ровно один из множителей, входящих в левую часть неравенства. При переходе через точку $x=4$ знак левой части неравенства не изменяется, т.к. в точке $x=4$ меняет знак одновременно и множитель $\log_4(17-2^x)$, и знаменатель $\log_{16}x-\log_4 2$. Отсюда легко видеть, что распределение знаков левой части неравенства именно такое, как указано на рисунке выше, и, следовательно, получаем ответ: $x\in(0;\log_4 3]\cup(\pi;4)\cup(4;\log_2 17)$.

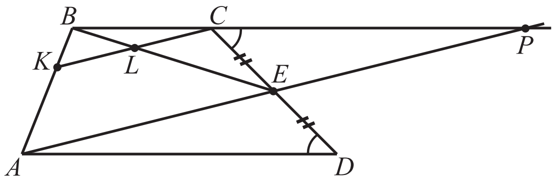
16. Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки BE и CK пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CL = KL$.

б) Найдите площадь треугольника BCK, если площадь трапеции $ABCD$ равна 50, а меньшее из её оснований BC относится к большему основанию AD как $2:3$.

Решение.

а) Пусть P – точка пересечения прямых AE и BC, см. рисунок. Так как точка E – середина CD, т.е. $CE = DE$, то треугольники AED и PEC равны по стороне и прилежащим углам ($\angle AED = \angle CEP$ – как вертикальные, $\angle ADE = \angle PCE$ – как накрест лежащие при параллельных прямых). Значит, $AE = EP$ и $CP = AD$.



Заметим, что поскольку $KL \parallel AE$, то треугольники BKL и BAE подобны. Следовательно, $\dfrac{KL}{AE} = \dfrac{BL}{BE}$ (1). Аналогично, из подобия треугольников BCL и BPE, получаем: $\dfrac{CL}{PE} = \dfrac{BL}{BE}$ (2).

Правой частью равенств (1) и (2) является одно и то же отношение $\dfrac{BL}{BE}$, поэтому $\dfrac{KL}{AE} = \dfrac{CL}{PE}$. А поскольку $AE = PE$, то $KL = CL$, что и требовалось доказать.

б) Пусть $BC = 2x$, тогда из условия $BC : AD = 2:3$ следует, что $AD = 3x$. А поскольку в пункте а) доказано, что $CP = AD$, то $BP = BC + CP = 2x + 3x = 5x$.

Так как треугольник BCK подобен треугольнику BPA, а отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то для отношения площадей этих треугольников имеем равенство:

$$\frac{S_{BCK}}{S_{BPA}} = \left(\frac{BC}{BP}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

Остаётся лишь заметить, что поскольку четырёхугольник $ABCE$ является общей частью трапеции $ABCD$ и $\triangle ABP$, а площади треугольников AED и CEP равны (т.к. сами эти треугольники равны), то площадь трапеции $ABCD$ равна площади $\triangle ABP$, (т.к. трапеция $ABCD$ и $\triangle ABP$ составлены их фигур, имеющих одинаковую площадь). Значит, $S_{BPA} = 50$

и, следовательно, $S_{BCK} = S_{BPA} \cdot \dfrac{4}{25} = 50 \cdot \dfrac{4}{25} = 8$.

Ответ: 8

17. В сентябре планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по август каждого года необходимо выплачивать часть долга.

Найдите r, если известно, что при условии ежегодных выплат в размере 665500 рублей кредит будет полностью погашен за 4 года, а при условии ежегодных выплат в размере 1215500 рублей кредит будет полностью погашен за 2 года.

Решение.

Пусть в банке планируется взять в кредит S рублей, a рублей – размер ежегодной выплаты, необходимой для полного погашения кредита за четыре года, b рублей – размер ежегодной выплаты, необходимой для полного погашения кредита за два года, $k = 1 + \dfrac{r}{100}$. По условию, $a = 665500$ рублей, $b = 1215500$ рублей.

Пусть M рублей – долг на конец года. Каждый январь долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего года. Тогда в январе следующего года долг будет равен $M + \dfrac{r}{100} \cdot M = M \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right) = M \cdot k$, т.е. он возрастает в k раз.

Рассмотрим случай, когда долг будет полностью погашен за 2 года. В январе 1-го года долг (в рублях) будет равен Sk, после первой выплаты долг составит $Sk - b$. В январе 2-го года долг будет равен $(Sk-b)k$, после второй выплаты долг составит $(Sk - b)k - b$. По условию, при ежегодных выплатах, равных b рублей, кредит будет полностью погашен за два года, т.е. $(Sk - b)k - b = 0$. Отсюда, $Sk^2 - b(k+1) = 0$, $Sk^2 = b(k+1)$ (1).

Рассмотрим случай, когда долг будет полностью погашен за 4 года. Найдём, чему будет равен долг (в рублях) в конце каждого года после ежегодной выплаты.

В конце 1-го года долг после выплаты будет равен $Sk - a$.

В конце 2-го года: $(Sk - a)k - a = Sk^2 - a(k+1)$.

В конце 3-го года: $(Sk^2 - a(k+1))k - a = Sk^3 - a(k^2 + k + 1)$.

В конце 4-го года: $(Sk^3 - a(k^2 + k + 1))k - a = Sk^4 - a(k^3 + k^2 + k + 1)$.

По условию, при ежегодных выплатах, равных a рублей, кредит будет полностью погашен за 4 года, т.е. $Sk^4 - a(k^3 + k^2 + k + 1) = 0$, $Sk^4 = a(k^3 + k^2 + k + 1)$ (2).

Найдём k. Для этого поделим равенство (2) на равенство (1):

$$\frac{Sk^4}{Sk^2} = \frac{a(k^3 + k^2 + k + 1)}{b(k+1)};\ k^2 = \frac{a(k^2+1)(k+1)}{b(k+1)} = \frac{a(k^2+1)}{b}.$$

Получаем: $k^2 = \dfrac{a(k^2+1)}{b}$, $bk^2 = ak^2 + a$, $k^2(b-a) = a$, $k^2 = \dfrac{a}{b-a}$, $k = \pm\sqrt{\dfrac{a}{b-a}}$. По условию задачи $k > 0$, значит, $k = \sqrt{\dfrac{a}{b-a}}$. Подставим значения a и b в полученное выражение:

$$k = \sqrt{\frac{665500}{1215500 - 665500}} = \sqrt{\frac{6655}{5500}} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1.$$

Найдём значение r: $k = 1 + \dfrac{r}{100} = 1{,}1$, $\dfrac{r}{100} = 0{,}1$, $r = 10$.

Ответ: 10

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\sqrt{x^2 - 4x + 4a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$.

Решение.

Сначала рассмотрим по отдельности уравнения $\log_4(2x-1) = 0$ (1) и $\sqrt{x^2 - 4x + 4a - a^2} = 0$ (2).

Единственным корнем уравнения (1) является число $x_0 = 1$, а его областью определения является интервал $(0{,}5; +\infty)$.

Рассмотрим уравнение (2). Заметим, что $x^2 - 4x + 4a - a^2 = (x-a)(x+a) - 4(x-a) = (x-a)(x+a-4)$. Поэтому корнями уравнения (2) при любом значении a являются числа $x_1 = a$, $x_2 = 4 - a$. Так как $x_1 < x_2$ в том случае, если $a < 4 - a$, $a < 2$, то при $a < 2$ областью определения D уравнения (2) является множество $(-\infty; a] \cup [4-a; +\infty)$. Если же $a > 2$, то $D = (-\infty; 4-a] \cup [a; +\infty)$.

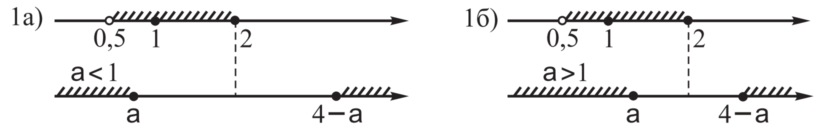
Перейдём к рассмотрению данного в условии уравнения

$$\log_4(2x-1)\cdot\sqrt{x^2 - 4x + 4a - a^2} = 0\ (*).$$

Отметим сразу, что значение $a = 2$ не является искомым: при $a = 2$ уравнение $(*)$ имеет два корня на отрезке $[0; 2]$: $x_0 = 1$ и $x_1 = x_2 = 2$.

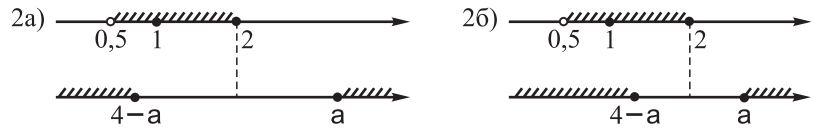
Рассматривая поочерёдно случаи $a < 2$ и $a > 2$, нанесём на одну числовую ось промежуток $(0{,}5; 2]$ и корень $x_0 = 1$ уравнения (1), а на другую — область определения и корни уравнения (2).

1) Если $a < 2$, то $4 - a > 2$. В этом случае область определения уравнения (2) такова, как показана на рисунках 1а) и 1б).



По рисунку видим, что уравнение $(*)$ имеет единственный корень $x_1 = a$ на отрезке $[0; 2]$ в том случае, если $0{,}5 < a \leqslant 1$. При $a > 1$ уравнение $(*)$ имеет два корня на отрезке $[0; 2]$: $x_0 = 1$ и $x_1 = a$. При $a \leqslant 0{,}5$ уравнение $(*)$ не имеет корней на отрезке $[0; 2]$.

2) Если $a > 2$, то $4 - a < 2$. В этом случае область определения уравнения (2) такова, как показано на рисунках 2а) и 2б).



По рисунку видим, что уравнение $(*)$ имеет единственный корень $x_2 = 4 - a$ на отрезке $[0; 2]$ в том случае, если $0{,}5 < 4 - a \leqslant 1$, то есть при $3 \leqslant a < 3{,}5$. Если $4 - a > 1$, $a < 3$, то уравнение $(*)$ имеет два корня на отрезке $[0; 2]$: $x_0 = 1$ и $x_2 = 4 - a$. Если $4 - a \leqslant 0{,}5$, $a \geqslant 3{,}5$, то уравнение $(*)$ не имеет корней на отрезке $[0; 2]$.

Объединяя найденные в случаях 1) и 2) значения a, получаем ответ: $a \in (0{,}5; 1] \cup [3; 3{,}5)$.

19. На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма всех написанных на доске чисел равна 1135.

а) Может ли на доске быть ровно 31 чётное число?

б) Могут ли ровно семь чисел на доске оканчиваться на 7?

в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

Решение.

а) Если на доске ровно 31 чётное число, то нечётных чисел на доске ровно 4. Но сумма четырёх нечётных чисел (и вообще любого чётного количества нечётных чисел) всегда чётна, поэтому в этом случае сумма всех написанных чисел будет чётна. А это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1135. Поэтому на доске не может быть ровно 31 чётное число. Ответ в пункте а) — нет.

б) Если на доске ровно 7 чисел оканчиваются на 7, то число чётных чисел на доске равно $35-7=28$. Заметим, что $2+4+6+\ldots+56=$ $=2\cdot(1+2+3+\ldots+28)=2\cdot\dfrac{1+28}{2}\cdot 28=29\cdot 28=812$, а $7+17+27+$ $+37+47+57+67=7\cdot 7+10\cdot(1+2+\ldots+6)=49+10\cdot 21=259$. Так как $812+259=1071<1135$, то можно привести такой пример, что на доске ровно 7 чисел оканчиваются на 7. Для этого достаточно вместо числа 56 (наибольшего из приведённых выше чётных чисел) взять число $56+1135-1071=120$. Тогда набор чисел

$$\underbrace{2,4,\ldots,54}_{27\text{ чисел}},120,7,17,27,37,47,57,67$$

удовлетворяет условию задачи. Ответ в пункте б) — да.

в) Заметим, что количество нечётных чисел, написанных на доске, обязательно нечётно. (Иначе сумма всех чисел на доске будет чётна, а это противоречит тому, что она равна 1135.) Обозначим количество нечётных чисел на доске через N. Пример пункта б) показывает, что случай $N=7$ возможен. Следующие по порядку нечётные значения N — это $9, 11$ и т.д.

Покажем, что 11 (и более чисел) оканчивающихся на 7, на доске быть не могло. Сумма 11 различных чисел, оканчивающихся на 7, не меньше, чем $7\cdot 11+10\cdot(1+2+\ldots+10)=77+10\cdot 55=627$. Если на доске ровно 11 чисел, оканчивающихся на 7, то чётных чисел на доске будет $35-11=24$. При этом сумма всех чётных чисел на доске не меньше, чем $2+4+\ldots+48=2\cdot(1+2+\ldots+24)=2\cdot\dfrac{1+24}{2}\cdot 24=25\cdot 24=600$. Поэтому сумма всех чисел на доске не меньше, чем $627+600=1227$, но это противоречит тому, что она равна 1135. Следовательно, случай $N=11$ невозможен. Тем более невозможно, что $N\geqslant 13$: при дальнейшем увеличении количества чисел, делящихся на 7, их сумма возрастает больше, чем на 200 $(117+127=244>200)$, а сумма чётных чисел на доске уменьшается меньше, чем на 100 $(46+48=94<100)$, т.е. сумма S всех чисел на доске возрастает и становится ещё больше, чем 1227.

Итак, случай $N\geqslant 11$ невозможен. Построим пример, показывающий, что случай $N=9$ возможен. Если на доске 9 чисел оканчиваются на 7, то количество чётных чисел на доске будет равно $35-9=26$;

$$2+4+\ldots+52=2\cdot(1+2+\ldots+26)=2\cdot\frac{1+26}{2}\cdot 26=27\cdot 26=702;$$

$$7+17+\ldots+87=7\cdot 9+10\cdot(1+2+\ldots+8)=63+360=423;$$

так как $702+423=1125$ и $1135-1125=10$, то для построения требуемого примера достаточно наибольшее чётное число из приведённых выше (т.е. число 52) увеличить на 10. Стало быть, примером такого набора чисел, удовлетворяющего условиям задачи, в котором 9 чисел оканчиваются на 7, является набор чисел: $\underbrace{2,4,\ldots,50}_{25\text{ чисел}}, 62, \underbrace{7,17,\ldots,87}_{9\text{ чисел}}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 9.

Тест №15

13. а) Решите уравнение $\dfrac{10\cos^2 x+\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

а) $\dfrac{10\cos^2 x+\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}10\cos^2 x+\cos x-2=0\\ -\sin x>0\end{cases}$ $(*)$.

Квадратное уравнение $10t^2+t-2=0$ имеет корни $t=-\dfrac{1}{2}$ и $t=\dfrac{2}{5}$. Поэтому система $(*)$ равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin x<0\end{cases} \quad\text{и}\quad 2)\begin{cases}\cos x=\dfrac{2}{5}\\ \sin x<0.\end{cases}$$

Корнями уравнения $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ являются $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in Z$; корнями уравнения $\cos x=\dfrac{2}{5}$ являются $x=\pm\arccos\dfrac{2}{5}+2\pi n$, где $n\in Z$. Условию $\sin x<0$ удовлетворяют точки, лежащие в 3-ей и 4-ой четвертях тригонометрического круга. Поэтому решением системы 1) являются $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, а решением системы 2) являются $x=-\arccos\dfrac{2}{5}+2\pi n$, где $n\in Z$.

б) $-\pi<-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n<\dfrac{3\pi}{2},\ n\in Z \Leftrightarrow -1+\dfrac{2}{3}<2n<\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3},\ n\in Z \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}<n<\dfrac{13}{12},\ n\in Z \Leftrightarrow n=0$ или $n=1$. Таким образом, среди точек $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$ промежутку $\left(-\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ принадлежат точки $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ и $x=\dfrac{4\pi}{3}$, соответствующие значениям $n=0$ и $n=1$.

Чтобы определить, какие из точек $x = -\arccos\dfrac{2}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$ входят в промежуток $\left(-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, заметим, что $0 < \arccos\dfrac{2}{5} < \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому из неравенств $-\pi < -\arccos\dfrac{2}{5} + 2\pi n < \dfrac{3\pi}{2}$ следует, что $-\pi < 2\pi n < 2\pi$, $-\dfrac{1}{2} < n < 1$, $n = 0$. При $n = 0$ имеем: $x = -\arccos\dfrac{2}{5}$ — эта точка входит в промежуток $\left(-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: а) $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = -\arccos\dfrac{2}{5} + 2\pi n, n \in Z$

б) $-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, -\arccos\dfrac{2}{5}$

14. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.

б) Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB, если $SB = BC$.

Решение.

а) Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, а отрезок SO — высота пирамиды, см. рис. 1, то $SA = SB = SC = SD$ (прямоугольные треугольники ASO и BSO равны по двум катетам, откуда $SA = SB$, равенство других пар отрезков устанавливается аналогично).

рис. 1

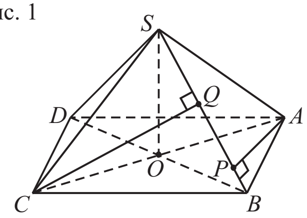
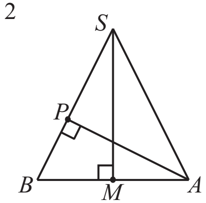


рис. 2



Рассмотрим равнобедренный треугольник SAB. Пусть M — середина стороны AB, тогда SM — медиана, а значит и высота к основанию этого треугольника, см. рис. 2. Из прямоугольных треугольников SBM и ABP имеем: $\dfrac{BM}{BS} = \cos\angle B$, $\dfrac{BP}{AB} = \cos\angle B$. Значит, $\dfrac{BM}{BS} = \dfrac{BP}{AB}$. Из этого

равенства получаем, что $BP = \dfrac{BM}{BS} \cdot AB = \dfrac{AB/2}{BS} \cdot AB = \dfrac{AB^2}{2BS}$.

Абсолютно аналогично, рассматривая грань SBC, получаем, что $BQ = \dfrac{BC^2}{2BS}$.

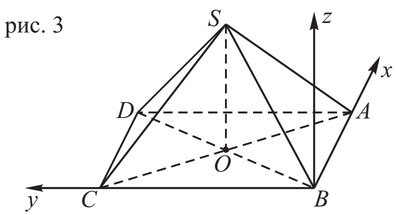
Из равенств $BP = \dfrac{AB^2}{2BS}$ и $BQ = \dfrac{BC^2}{2BS}$ следует, что $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$.

А так как по условию $AB = \dfrac{1}{2}BC$, то $\dfrac{BP}{BQ} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Поэтому $BQ = 4BP$, $PQ = BQ - BP = 3BP$ и, значит, $BP : PQ = 1 : 3$, что и требовалось доказать.

б) Для решения данной задачи применим координатный метод. В тексте решения приводятся все определения и факты, необходимые для его понимания. При этом все вспомогательные сведения (которые при написании решения на экзамене, конечно же, писать не нужно) выделены курсивом.

1) Пусть $\overline{n}$ — некоторый вектор, перпендикулярный плоскости, содержащей грань ABS, а $\overline{m}$ — некоторый вектор, перпендикулярный плоскости, содержащей грань CBS. Тогда искомый двугранный угол φ пирамиды при ребре BS либо равен углу между векторами $\overline{n}$ и $\overline{m}$, либо дополняет его до $180°$. Поэтому модуль косинуса угла φ можно найти из формулы: $|\cos\varphi| = \dfrac{|(\overline{n}, \overline{m})|}{|\overline{n}| \cdot |\overline{m}|}$, где $|(\overline{n}, \overline{m})|$ — модуль скалярного произведения векторов $\overline{n}$ и $\overline{m}$, а $|\overline{n}|, |\overline{m}|$ — длины этих векторов. (*Напомним, что скалярное произведение векторов $\overline{n}$ и $\overline{m}$ вычисляется по формуле: $(\overline{n}, \overline{m}) = |\overline{n}| \cdot |\overline{m}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\overline{n}$ и $\overline{m}$. А поскольку для искомого угла φ выполняется одно из двух: либо $\varphi = \alpha$, либо $\varphi = \pi - \alpha$, то $|\cos\varphi| = |\cos\alpha|$.*)

рис. 3



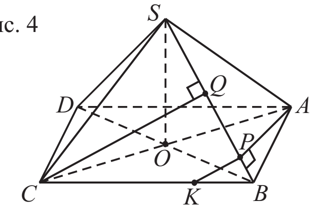
Пусть $AB = 2$, тогда $BS = BC = 4$. Введём систему координат так, как показано на рисунке 3: начало координат в точке B, оси Bx и By направлены вдоль лучей BA и BC, ось Bz направлена перпендикулярно плоскости ABC. Тогда координаты точки B — $(0; 0; 0)$, точки A — $(2; 0; 0)$, точки $C-(0;4;0)$, точки $O-(1;2;0)$, а точки $S-(1;2;h)$, где $h-$ длина высоты SO. Вычислим $h:\ BO^2=1^2+2^2=5,\ \ SO^2=BS^2-BO^2=$ $=4^2-5=11,\ h=SO=\sqrt{11}$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точки B, A, S. Для этого в общий вид уравнения плоскости $ax+by+cz+d=0$ подставим поочерёдно координаты этих точек. Подставляя координаты точки $B(0;0;0)$, получаем, что $d=0$. Подставляя в уравнение $ax+by+cz=0$ координаты точки $A(2;0;0)$, получаем, что $a=0$. То есть уравнение плоскости BAS имеет вид: $by+cz=0$. Заметим, что $b\neq 0:$ если $b=0$, то из уравнения $cz=0$ следует, что либо $c=0$, либо $z=0$. Но $c\neq 0$, так как уравнение $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0$ не определяет плоскость (этому уравнению удовлетворяют любые x, y, z), а уравнение $z=0$ задаёт точки, лежащие в плоскости ABC, которая отлична от плоскости BAS.
Так как $b\neq 0$, то b можно взять произвольно *(коэффициенты уравнения плоскости определены с точностью до произвольного множителя, поэтому убедившись, что некоторый из коэффициентов не равен нулю, его можно взять равным любому числу, при этом остальные коэффициенты уравнения плоскости будут определены уже однозначно)*. Полагая $b=1$ и подставляя в уравнение $y+cz=0$ координаты точки S $(y=2,\ z=\sqrt{11})$, получаем: $2+c\sqrt{11}=0$, откуда $c=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$. Умножая коэффициенты $a=0,\ b=1,\ c=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$ на $\sqrt{11}$, получаем, что в определённой нами системе координат уравнение плоскости BAS имеет вид: $\sqrt{11}y-2z=0$. Согласно известному факту, отсюда следует, что вектор $\overline{n}=\overrightarrow{(0;\sqrt{11};-2)}$ перпендикулярен плоскости BAS.

Аналогично составим уравнение плоскости BCS, подставляя в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$ поочерёдно координаты точек B, C и S. Подставляя координаты точки $B\,(0;0;0)$, получаем, что $d=0$. Подставляя координаты точки $C\,(0;4;0)$, в уравнение $ax+by+cz=0$, получаем, что $b=0$. Так как плоскость BCS отлична от плоскости ABC, то в её уравнении $ax+cz=0$ коэффициент a не равен нулю. Полагая $a=1$ и подставляя в уравнение $x+cz=0$ координаты точки S $(x=1,$ $z=\sqrt{11})$, получаем: $1+c\sqrt{11}=0$, откуда $c=-\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. Умножая коэффициенты $a=1,\ b=0,\ c=-\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ на $\sqrt{11}$, получаем, что уравнение плоскости BCS имеет вид: $\sqrt{11}x-z=0$. Поэтому вектор $\overline{m}=\overrightarrow{(\sqrt{11};0;-1)}$ перпендикулярен плоскости BCS.

Определив векторы нормалей $\overline{n}$ и $\overline{m}$ так, как указано выше, проведём вычисления: $|\overline{n}|=\sqrt{0+11+4}=\sqrt{15}$; $|\overline{m}|=\sqrt{11+0+1}=\sqrt{12}$, $(\overline{n},\overline{m})=0\cdot\sqrt{11}+\sqrt{11}\cdot 0+(-2)\cdot(-1)=2$ *(напомним, что скалярное произведение векторов* $\overrightarrow{(x_1;y_1;z_1)}$ *и* $\overrightarrow{(x_2;y_2;z_2)}$ *равно сумме произведений их соответствующих координат:* $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$*)*.
Отсюда получаем, что $|\cos\varphi|=\dfrac{|(\overline{n},\overline{m})|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{15}$.
Нам остаётся лишь определить знак $\cos\varphi$. Покажем, что $\cos\varphi<0$. Для этого в плоскости BSC восстановим перпендикуляр из точки P к прямой BS и точку пересечения этого перпендикуляра с ребром BC обозначим через K, см. рисунок 4. Так как $AP\perp BS$ и $PK\perp BS$, то $\angle APK-$ это линейный угол двугранного угла при ребре SB, т.е. $\varphi=\angle APK$. По теореме косинусов из $\triangle APK$ имеем: $\cos\varphi=\dfrac{AP^2+KP^2-AK^2}{2AP\cdot PK}$.

рис. 4



Остаётся лишь заметить, что поскольку $AK^2=AB^2+BK^2$ и $AB>AP$, $BK>KP$, то $AK^2>AP^2+KP^2$, и, значит, $\cos\varphi<0$.

Таким образом, $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{5}}{15}$, поэтому $\varphi=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{15}$.

Ответ: $\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{15}$

Примечание 1. В самой концовке решения (при доказательстве того, что $\cos\varphi<0$) намечен другой способ вычисления угла φ. Достаточно вычислить длины отрезков AK, AP, PK и выразить $\cos\varphi$ по теореме косинусов из $\triangle APK$, как это и было сделано. Длина отрезка AK была вычислена по теореме Пифагора из $\triangle ABK$. Длину отрезка AP несложно найти, выразив двумя способами площадь $\triangle ABS$: $2S_{ABS}=AB\cdot SM=BS\cdot AP$, откуда $AP=\dfrac{AB\cdot SM}{BS}$ (напомним, что через SM мы обозначали высоту $\triangle ABS$). Отрезок PK в силу подобия треугольников BKP и BCQ с коэффициентом $\dfrac{1}{4}$ (это доказано в пункте а), равен $\dfrac{CQ}{4}$. А длина отрезка CQ вычисляется как высота треугольника BCS, аналогично тому, как вычисляется длина отрезка AP.

Примечание 2. Координатный метод является универсальным – его можно применить к любой задаче, в которой требуется найти угол между плоскостями или угол между прямой и плоскостью. Однако для большинства «школьных» задач «чисто геометрический» способ решения оказывается предпочтительнее, чем координатный метод (короче запись, меньше вычислений).

Примечание 3. Несмотря на то, что для большинства «школьных» задач «чисто геометрический» метод более предпочтителен, всё же настоятельно рекомендуем Вам ознакомиться с координатным методом по какому-либо учебнику (см., например, [1] в списке литературы). Во-первых, как выясняется, на ЕГЭ могут встретиться и такие задачи, для которых «чисто геометрическое» решение крайне затруднительно (см. задачу 14 теста № 59, похожая на неё задача была на экзамене несколько лет назад). А во-вторых, хорошее знакомство с координатным методом облегчит обучение на 1-ом курсе в ВУЗе, поскольку практически на любом факультете любого ВУЗа первокурсники изучают данный метод.

15. Найдите все целые значения x, удовлетворяющие неравенству:

$$\log_{\sqrt{3}}\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)<4.$$

Решение.

1) Областью определения данного в условии неравенства являются те значения x, при которых выражение $\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)$ положительно. Так как $\sqrt{3}>1$, то $\log_{\sqrt{3}}\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)<4 \Leftrightarrow 0<\log_{\sqrt{2}}(x-\log_5 6)<\left(\sqrt{3}\right)^4$. А поскольку $\left(\sqrt{3}\right)^4=9$ и $\sqrt{2}>1$, то данное в условии неравенство равносильно неравенствам:

$$1<x-\log_5 6<\left(\sqrt{2}\right)^9 \;\Leftrightarrow\; 1+\log_5 6<x<\left(\sqrt{2}\right)^9+\log_5 6.$$

Следовательно, решением данного в условии неравенства являются $x\in(1+\log_5 6;16\sqrt{2}+\log_5 6)$.

2) Так как $2<1+\log_5 6<3$, то наименьшим целым значением x, удовлетворяющим данному в условии неравенству, является $x=3$.

В силу неравенств $\sqrt{2}>1{,}4$ и $\log_5 6>1$ имеем: $16\sqrt{2}+\log_5 6>$ $>16\cdot 1{,}4+1=23{,}4>23$. Отсюда следует, что значение $x=23$ входит в промежуток $(1+\log_5 6;16\sqrt{2}+\log_5 6)$. Покажем, что $16\sqrt{2}+\log_5 6<24$, отсюда будет следовать, что $x=23$ – наибольшее целое значение, входящее в промежуток $(1+\log_5 6;16\sqrt{2}+\log_5 6)$.

Для доказательства требуемого неравенства заметим, что

$$\log_5 6<1{,}2 \Leftrightarrow 6^5<5^6 \text{ – верное неравенство и}$$

$$\sqrt{2}<1{,}42 \Leftrightarrow 2<1{,}42^2 \text{ – верное неравенство.}$$

Из этих неравенств следует, что $16\sqrt{2}+\log_5 6<16\cdot 1{,}42+1{,}2=$ $=23{,}92<24$, ч.т.д.

Таким образом, все целые значения x, удовлетворяющие данному в условии неравенству, это все целые числа из отрезка $[3;23]$.

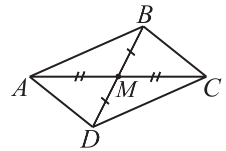
Ответ: $3\leqslant x\leqslant 23,\ x\in Z$

16. Отрезок BM – медиана треугольника ABC.

а) Докажите, что $BM<\frac{1}{2}\left(AB+BC\right)$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=17$, $BC=9$, $BM=5$.

Решение.



а) Отложим на луче BM от точки M отрезок MD, равный отрезку BM, см. рисунок.

Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом (т.к. его диагонали делятся точкой пополам). Поэтому $CD=AB$. По неравенству треугольника, применённому к $\triangle BDC$, имеем: $BD<BC+CD$. А поскольку $BD=2BM$ и $CD=AB$, то предыдущее неравенство преобразуется следующим образом:

$2BM<BC+AB$, $BM<\frac{1}{2}\left(AB+BC\right)$, ч.т.д.

б) Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то площади треугольников ABC и ABD равны: у этих треугольников общая сторона AB, а высоты обоих треугольников, проведённые к стороне AB, равны h, где h – расстояние между параллельными прямыми AB и CD. Поэтому искомая величина равна площади треугольника ABD.

Площадь $\triangle ABD$ найдём по формуле Герона. Так как $AB=17$, $BD=$ $=2BM=10$, $AD=BC=9$, то полагая в формуле Герона $a=17$, $b=10$, $c=9$, получаем: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=18$, $p-a=1$, $p-b=8$, $p-c=9$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18\cdot 8\cdot 9}=\sqrt{18\cdot 4\cdot 18}=18\cdot 2=36$.

Ответ: 36

17. В ноябре 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по октябрь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в ноябре каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Ноябрь 2017	Ноябрь 2018	Ноябрь 2019	Ноябрь 2020
Долг (в тыс. рублей)	S	0,7 S	0,5 S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение.

Долг перед банком (в тыс. рублей) на ноябрь каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом: S; $0{,}7S$; $0{,}5S$; 0. По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 22%, значит, долг в январе каждого года равен: $1{,}22S$; $0{,}854S$; $0{,}61S$. Следовательно, выплаты с февраля по октябрь каждого года составляют: $0{,}52S$; $0{,}354S$; $0{,}61S$. По условию, эти числа должны быть целыми. Преобразуем числа $0{,}52, 0{,}354$ и $0{,}61$ в обыкновенные несократимые дроби: $0{,}52 = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$; $0{,}354 = = \frac{354}{1000} = \frac{177}{500}$; $0{,}61 = \frac{61}{100}$. Числа $\frac{13S}{25}$, $\frac{177S}{500}$ и $\frac{61S}{100}$ будут целыми в том и только в том случае, если S делится на $25, 100$ и 500. Наименьшим общим кратным $25, 100$ и 500 является число 500, т.е. наименьшее возможное значение S равно 500. *Ответ:* 500

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5x + \big|2x - |x+a|\big| = 10|x+1|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

1) Перепишем данное уравнение в виде:
$$10 \cdot |x+1| - 5x - \big|2x - |x+a|\big| = 0,$$
и выражение в левой части этого уравнения обозначим через $f(x)$.

При $x \geqslant -1$ имеем: $f(x) = 10(x+1) - 5x - \big|2x - |x+a|\big|$,
$$f(x) = 5x - \big|2x - |x+a|\big| + 10.$$

Заметим, что при любом раскрытии модулей выражение $5x - \big|2x - |x+a|\big|$ является выражением вида $kx + b$, где $k \geqslant 5 - (2+1)$.

Следовательно, на любом участке внутри промежутка $[-1; +\infty)$ функция $f(x)$ определена выражением вида $f(x) = kx + b$, где $k > 0$. Поэтому при $x \geqslant -1$ функция $f(x)$ неограниченно возрастает.

Аналогично получаем, что при $x \leqslant -1$ функция $f(x)$ неограниченно убывает: $f(x) = -15x - \big|2x - |x+a|\big| - 10$, выражение $-15x - \big|2x - |x+a|\big|$ при любом раскрытии модулей является выражением вида $kx + b$, где $k \leqslant -15 + (2+1)$, $k \leqslant -12$.

2) Так как функция $f(x)$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geqslant -1$, а при $x \leqslant 1$ неограниченно убывает, то уравнение $f(x) = 0$ имеет корень $\Leftrightarrow$ $f(-1) \leqslant 0$. В самом деле, если $f(-1) < 0$, то корни уравнения $f(x) = 0$ существуют в силу непрерывности и неограниченного возрастания $f(x)$ при $x \geqslant -1$. А если $f(-1) > 0$, то корней уравнения $f(x) = 0$ не существует, так как $x = -1$ — точка минимума $f(x)$, т.е. $f(x) \geqslant f(1) > 0$.

3) Выше показано, что искомыми значениями a являются те, при которых $f(-1) \leqslant 0$. Решим это неравенство: $f(-1) = 5 - \big|2 + |a-1|\big| = = 3 - |a-1|$, $3 - |a-1| \leqslant 0$, $|a-1| \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 \geqslant 3 \\ a-1 \leqslant -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 4 \\ a \leqslant -2. \end{array}\right.$

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

19. Каждый из 30 студентов писал одну из двух контрольных работ или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл писавших её студентов составил 16. Возьмём наивысший балл каждого из студентов, полученных им за эти контрольные работы (если студент писал одну работу, то берём балл за эту работу), и подсчитаем среднее арифметическое этих баллов, обозначив результат через S.

а) Приведите пример, когда $S < 16$.

б) Может ли S быть равным 8?

в) Какое наименьшее значение может принимать S, если обе контрольные работы писали 12 студентов?

Решение.

а) Например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 20 баллов за каждую, а из остальных 10 студентов пятеро писали только 1-ую работу, другие пятеро – только 2-ую работу, и все они получили по 0 баллов, то средний балл по каждой из работ в отдельности равен $\frac{20 \cdot 20 + 0 \cdot 5}{25} = 16$, а значение S равно $\frac{20 \cdot 20}{30} = \frac{40}{3} < 16$.

б) Пусть Σ_1 — сумма баллов тех студентов, которые писали только одну контрольную, Σ_M — сумма наибольших баллов тех студентов, которые писали обе работы, Σ_m — сумма наименьших баллов этих студентов. По определению числа S имеем: $\dfrac{\Sigma_1+\Sigma_M}{30}=S$, $\Sigma_1+\Sigma_M=30S$. Количество студентов, писавших обе контрольные работы, обозначим через k, а через n_1 и n_2 обозначим количества студентов, писавших только 1-ую и только 2-ую работы соответственно. Отметим, что $n_1+n_2+k=30$ (число всех студентов).

Так как средний балл по 1-ой и по 2-ой работе равен 16, то сумма всех баллов по 1-ой работе равна $S_1=16(n_1+k)$, а сумма всех баллов по 2-ой работе равна $S_2=16(n_2+k)$. Поэтому сумма всех баллов по обеим работам равна $S_1+S_2=16\cdot(n_1+n_2+k+k)=16\cdot(30+k)$. С другой стороны, эта сумма равна $\Sigma_1+\Sigma_M+\Sigma_m$, т.е. $\Sigma_1+\Sigma_M+\Sigma_m=16\cdot(30+k)$. А вспомнив, что $\Sigma_1+\Sigma_M=30S$, получаем: $30S+\Sigma_m=16\cdot(30+k)$, $S=\dfrac{16\cdot(30+k)-\Sigma_m}{30}=16+\dfrac{16k-\Sigma_m}{30}$. Заметим, что поскольку сумма наименьших баллов k студентов, писавших обе работы, не может превосходить $20k$, то $\Sigma_m\leqslant 20k$ (причём знак равенства в этом неравенстве достигается лишь в том случае, если все k студентов получили 20 баллов по обеим работам). Следовательно, $S=16+\dfrac{16k-\Sigma_m}{30}\geqslant 16+\dfrac{16k-20k}{30}$, т.е. $S\geqslant 16-\dfrac{2k}{15}$. Если $S=8$, то из этого неравенства получаем, что $16-\dfrac{2k}{15}\leqslant 8$, $\dfrac{2k}{15}\geqslant 8$, $k\geqslant 60$, что невозможно ($k\leqslant 30$ — число всех студентов). Полученное противоречие показывает, что S не может быть равно 8.

в) Если $k=12$, то из доказанного в пункте б) неравенства $S\geqslant 16-\dfrac{2k}{15}$ следует, что $S\geqslant 16-\dfrac{24}{15}=16-\dfrac{8}{5}=14{,}4$. Построим пример, показывающий, что эта нижняя оценка достижима.

Для выполнения равенства $S=14{,}4$ необходимо, чтобы $\Sigma_m=20k$ (см. пункт б), т.е. все 12 студентов, писавших обе работы, получили по 20 баллов за каждую. Пусть из остальных 18 студентов 9 человек писали первую работу и 9 человек — вторую, т.е. $n_1=n_2$. Тогда суммы баллов S_1 и S_2, набранных студентами отдельно по 1-ой и по 2-ой работам, равны друг другу и равны $S_1=S_2=16\cdot(n_2+k)=16\cdot(9+12)=336$ (см. пункт б). Так как 12 студентов, писавших обе работы, в сумме набрали по каждой из работ $12\cdot 20=240$ баллов, то на других 9 человек, писавших

только одну из работ (либо 1-ую, либо 2-ую), приходится $336-240=96$ баллов. Это реализуется. например, в том случае, если из 9 человек, писавших только одну работу (либо 1-ую, либо 2-ую), 8 человек получили по 10 баллов и 1 человек получил 16 баллов. Приведённый пример показывает, что значение $S=14{,}4$ достижимо, т.е. это наименьшее возможное значение в том случае, когда обе работы писали 12 человек.

Ответ: а) 20 человек писали обе работы и получили по 20 баллов за каждую, по 5 человек писали только 1-ую и только 2-ую работы, получив по 0 баллов; б) нет; в) $14{,}4$.

Тест №17

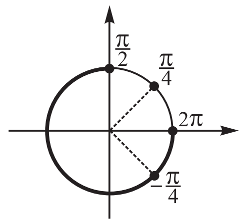
13. а) Решите уравнение $\log_2^2(\cos^2 x)-22\log_2(\cos x)-12=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение.

а) Областью определения уравнения являются те значения x, для которых $\cos x>0$. Если $\cos x>0$, то $\log_2(\cos^2 x)=2\log_2(\cos x)$, поэтому наше уравнение преобразуется к равносильному ему уравнению: $4\log_2^2(\cos x)-22\log_2(\cos x)-12=0$. Делая замену $\log_2(\cos x)=t$ и сокращая уравнение на 2, получаем уравнение $2t^2-11t-6=0$, корнями которого являются $t_1=-\dfrac{1}{2}$, $t_2=6$. Возвращаясь к неизвестному x, имеем: $\log_2(\cos x)=-\dfrac{1}{2}$ или $\log_2(\cos x)=6$ $\Rightarrow$ $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x=2^6$. Уравнение $\cos x=64$ корней не имеет, поэтому данное в условии уравнение равносильно уравнению $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, корнями которого являются $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$.

б) Отметим на тригонометрической окружности точки, соответствующие значениям $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$, и дугу $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$, см. рисунок.



Из рисунка видим, что в промежуток $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$ попадает единственный корень нашего уравнения — $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$; б) $\dfrac{7\pi}{4}$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC сторона основания равна 9, а высота равна 3. На рёбрах AB, AC и AS отмечены соответственно точки M, N и K такие, что $AM = AN = AS$, $AK = 4$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите объём пирамиды $KSBC$.

Решение.

а) Пусть точка O — центр правильного треугольника ABC, BH — высота треугольника ABC. Тогда $BH = AB\cdot\dfrac{\sqrt3}{2} = \dfrac{9\sqrt3}{2}$, $BO = \dfrac{2}{3}BH = 3\sqrt3$. Отрезок SO — высота пирамиды, см. рис. 1. По теореме Пифагора из $\triangle BSO$ имеем: $SB^2 = BO^2 + SO^2 = (3\sqrt3)^2 + 3^2 = 36$, $SB = 6$. Далее, т.к. $BS = 6$, то $AM = AN = AS = 6$. Поэтому $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{2}{3}$ и, значит, прямая MN параллельна прямой BC и проходит через точку O, см. рис. 2.

рис. 1

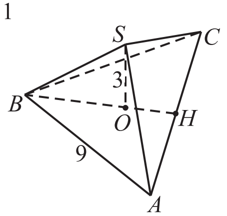
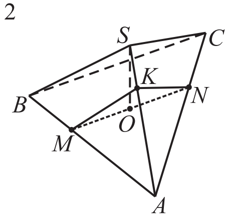


рис. 2



Так как $AK = 4$ (по условию), то $\dfrac{AK}{AS} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ и, значит, $\dfrac{AK}{AS} = \dfrac{AM}{AB}$. Следовательно, треугольники AMK и ABS подобны, поэтому прямая MK параллельна прямой BS.

По признаку параллельности двух плоскостей из параллельности прямых MN и BC и параллельности прямых MK и BS следует, что плоскости MNK и SBC параллельны, что и требовалось доказать.

б) Так как плоскости MNK и SBC параллельны, то расстояние от точки K до плоскости SBC равно расстоянию от любой другой точки плоскости MNK до плоскости SBC (все эти расстояния равны расстоянию между плоскостями, т.е. равны между собой). Следовательно, объём пирамиды $KSBC$ будет равен объёму пирамиды $PSBC$, где в качестве P можно взять любую точку плоскости MNK (у пирамид $KSBC$ и $PSBC$ одно и то же основание и равные высоты). Легче всего вычислить объём

пирамиды $PSBC$, если в качестве точки P взять точку O — в пункте а) было показано, что плоскость MNK содержит точку O.

Объём пирамиды $OSBC$ равен $\dfrac13 SO\cdot S_{BOC}$, где S_{BOC} — площадь треугольника BOC. Так как точка O — центр правильного треугольника ABC со стороной 9, то $S_{BOC} = \dfrac13 S_{ABC} = \dfrac13\cdot\dfrac{9^2\sqrt3}{4} = \dfrac{27\sqrt3}{4}$. Итак, искомый объём равен $\dfrac13 SO\cdot S_{BOC} = \dfrac13\cdot 3\cdot\dfrac{27\sqrt3}{4} = \dfrac{27\sqrt3}{4}$.

Ответ: $\dfrac{27\sqrt3}{4}$

15. Решите неравенство $\dfrac{36^x - 6^{x+1} + 3}{6^x - 5} + \dfrac{6^{x+1} - 39}{6^x - 7} \leqslant 6^x + 5$.

Решение.

Сделав замену $t = 6^x$, получим неравенство

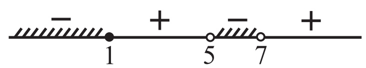
$$\frac{t^2 - 6t + 3}{t-5} + \frac{6t - 39}{t-7} \leqslant t + 5.$$

Преобразуем первую дробь в левой части неравенства, выделив из неё «целую часть»: $\dfrac{t^2 - 6t + 3}{t-5} = t + \dfrac{3-t}{t-5}$. Вычитая из обеих частей нашего неравенства t, получаем: $\dfrac{3-t}{t-5} + \dfrac{6t-39}{t-7} \leqslant 5$, $\dfrac{3-t}{t-5} + \dfrac{6t-39}{t-7} - 5 \leqslant 0$,

$$\frac{3-t}{t-5} + \frac{6t - 39 - 5t + 35}{t-7} \leqslant 0,\quad \frac{3-t}{t-5} + \frac{t-4}{t-7} \leqslant 0,$$

$$\frac{(3-t)(t-7) + (t-4)(t-5)}{(t-5)(t-7)} \leqslant 0,\quad \frac{10t - t^2 - 21 + t^2 - 9t + 20}{(t-5)(t-7)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{t-1}{(t-5)(t-7)} \leqslant 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов (см. данный ниже рисунок), находим, что его решениями являются $t \leqslant 1$ и $5 < t < 7$.



Возвращаясь к переменной x, получаем, что данное в условии неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 6^x \leqslant 1 \\ 5 < 6^x < 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \log_6 5 < x < \log_6 7. \end{array}\right.$$

Так как $\log_6 5 > 0$, то решениями данного в условии неравенства являются $x \in (-\infty; 0] \cup (\log_6 5; \log_6 7)$.

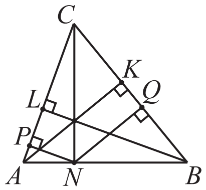
16. Отрезки $AK, BL, CN-$ высоты остроугольного треугольника ABC. Точки P и $Q-$ проекции точки N на стороны AC и BC соответственно.

а) Докажите, что прямые PQ и KL параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $PQKL$, если известно, что $CN=12,\ AC=13,\ BC=15$.

Решение.

а) Так как PN и $QN-$ высоты прямоугольных треугольников ACN и BCN, то $CP\cdot CA=CN^2$ и $CQ\cdot CB=CN^2$. Значит, $CP\cdot CA=CQ\cdot CB$, $\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{CB}{CA}$.



Из прямоугольных треугольников BCL и ACK имеем: $\dfrac{CL}{CB}=\cos\angle C$, $\dfrac{CK}{CA}=\cos\angle C$. Значит, $\dfrac{CL}{CB}=\dfrac{CK}{CA}\Rightarrow\dfrac{CL}{CK}=\dfrac{CB}{CA}$.

Из доказанных выше равенств $\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{CB}{CA}$ и $\dfrac{CL}{CK}=\dfrac{CB}{CA}$ следует, что $\dfrac{CL}{CK}=\dfrac{CP}{CQ}\Rightarrow\dfrac{CL}{CP}=\dfrac{CK}{CQ}$. Из последнего равенства следует, что треугольник CLK подобен треугольнику CPQ (по первому признаку). Поэтому $\angle CLK=\angle CPQ$ (как соответственные углы подобных треугольников) и, значит, прямые LK и PQ параллельны, что и требовалось доказать.

б) Площадь четырёхугольника $PQKL$ найдём как разность площади треугольника CPQ и треугольника CLK.

Составим выражения для вычисления площадей S_{CLK} и S_{CPQ} треугольников CLK и CPQ. Для этого заметим, что из доказанного в пункте а) равенства $\dfrac{CL}{CB}=\dfrac{CK}{CA}=\cos\angle C$ следует подобие треугольника CLK треугольнику CBA с коэффициентом подобия $\cos\angle C$. А площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому $\dfrac{S_{CLK}}{S_{CBA}}=(\cos\angle C)^2,\ S_{CLK}=S_{CBA}\cdot(\cos\angle C)^2$. Далее, поскольку $\triangle CPQ\sim\triangle CLK$ (это было доказано в пункте а), а $\triangle CLK\sim\triangle CBA$, то

$\triangle CPQ\sim\triangle CBA$. Обозначив коэффициент подобия треугольника CPQ треугольнику CBA через k, получим: $S_{CPQ}=S_{CBA}\cdot k^2$.

Таким образом, $S_{CPQ}-S_{CLK}=S_{CBA}\cdot k^2-S_{CBA}\cdot(\cos\angle C)^2=$ $=S_{CBA}\cdot\left(k^2-(\cos\angle C)^2\right)$, и для нахождения искомой площади S_{PQKL} нам остаётся вычислить площадь треугольника ABC, а также k и $\cos\angle C$. Чтобы найти S_{ABC}, достаточно вычислить AB. Из треугольников ACN и BCN по теореме Пифагора имеем: $AN^2=AC^2-CN^2=13^2-12^2=25$, $AN=5;\ BN^2=BC^2-CN^2=15^2-12^2=81,\ BN=9$. Отсюда находим, что $AB=AN+BN=14,\ S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CN=7\cdot 12=84$.

Для коэффициента подобия k треугольников CPQ и CBA имеем:

$$k=\frac{CP}{CB}=\frac{CN^2}{CA}\cdot\frac{1}{CB}=\frac{CN^2}{AC\cdot BC}=\frac{12^2}{13\cdot 15}=\frac{48}{65}.$$

Найдём $\cos\angle C$ как косинус суммы углов ACN и BCN. Обозначив для сокращения эти углы через α и β, находим:

$$\sin\alpha=\frac{AN}{AC}=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{CN}{AC}=\frac{12}{13},$$

$$\sin\beta=\frac{BN}{BC}=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\frac{CN}{BC}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

По формуле косинуса суммы

$$\cos\angle C=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{33}{65}.$$

Итак, $S_{PQKL}=S_{CPQ}-S_{CLK}=S_{CBA}\cdot\left(k^2-(\cos\angle C)^2\right)=$

$$=84\cdot\left(\left(\frac{48}{65}\right)^2-\left(\frac{33}{65}\right)^2\right)=84\cdot\frac{48-33}{65}\cdot\frac{48+33}{65}=84\cdot\frac{15}{65}\cdot\frac{81}{65}=$$

$$=\frac{84\cdot 3\cdot 81}{13\cdot 65}=\frac{20412}{845}.$$

Ответ: $\dfrac{20412}{845}$

Примечание. Доказанное нами в решении пункта б) подобие треугольников CLK и CBA с коэффициентом подобия $\cos\angle C$ является важным свойством треугольника, «отсекаемого от исходного треугольника прямой, проходящей через основания двух высот». Это свойство достаточно часто используется в решении других задач, поэтому сформулируем его в виде следующей леммы.

Лемма. Если отрезки BB_1 и CC_1- высоты треугольника ABC, в котором ни один из углов не является прямым, то треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $|\cos\angle A|$.

В решении пункта б) эта лемма была доказана в случае остроугольного треугольника ABC. Доказательство в случае тупоугольного треугольника ABC отличается не сильно (см. решение задачи 16 теста №47).

17. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 5 млн. рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 35 млн. рублей.

Решение.

Пусть первоначальный вклад равен S млн. рублей. Тогда в конце первого года вклад составит $1{,}1S$, а в конце второго – $1{,}21S$. В начале третьего года вклад составит $1{,}21S+5$, а в конце – $1{,}331S+5{,}5$. В начале четвёртого года вклад составит $1{,}331S+10{,}5$, а в конце – $1{,}4641S+11{,}55$.

По условию, нужно найти наибольшее целое S, для которого выполнено неравенство $1{,}4641S+11{,}55<35$; $S<16\dfrac{244}{14641}$. Наибольшее целое решение этого неравенства – число 16. Значит, размер первоначального вклада составляет 16 млн. рублей.

Ответ: 16 млн. рублей

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{17x^2+8ax+16}=x^2+ax+4$$
имеет ровно три различных корня.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} 17x^2+8ax+16=\left(x^2+ax+4\right)^2 & (1)\\ x^2+ax+4\geqslant 0 & (2). \end{cases}$$
Преобразуем уравнение (1), воспользовавшись формулой квадрата суммы: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$. Согласно этой формуле, имеем: $(x^2+ax+4)^2=x^4+a^2x^2+16+2ax^3+8x^2+8ax$. Перенеся все слагаемые из левой части уравнения (1) в правую и произведя сокращения и группировку слагаемых, получим:
$$x^4+2ax^3+(a^2-9)x^2=0,\quad x^2\cdot(x^2+2ax+a^2-9)=0,$$
$$x^2\cdot\left((x+a)^2-9\right)=0,\quad x^2\cdot(x+a-3)\cdot(x+a+3)=0.$$

Таким образом, корнями уравнения (1) являются $x_1=0$, $x_2=-a+3$ и $x_3=-a-3$.

Исходное уравнение имеет ровно три различных корня в том и только том случае, если все три найденных выше корня уравнения (1) различны и удовлетворяют неравенству $x^2+ax+4\geqslant 0$.

Корни x_1, x_2, x_3 различны в том и только в том случае, если $-a+3\neq 0$ и $-a-3\neq 0$, т.е. при всех $a\neq\pm 3$.

Значение $x=0$ удовлетворяет неравенству $x^2+ax+4\geqslant 0$ при любом значении параметра a. Подставляя в это неравенство $x=-a+3$ и $x=-(a+3)$, получаем следующую систему неравенств для параметра a:
$$\begin{cases} (a-3)^2-a(a-3)+4\geqslant 0,\\ (a+3)^2-a(a+3)+4\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+13\geqslant 0\\ 3a+13\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant \dfrac{13}{3}\\ a\geqslant -\dfrac{13}{3}. \end{cases}$$
Отсюда, учитывая условие $a\neq\pm 3$, получаем, что все искомые значения параметра a – это $a\in\left[-\dfrac{13}{3};-3\right)\cup(-3;3)\cup\left(3;\dfrac{13}{3}\right]$.

19. Множество чисел назовём «хорошим», если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли хорошим множество $\{1;2;3;\ldots;99;100\}$, состоящее из первых ста натуральных чисел?

б) Является ли хорошим множество $\{2;4;8;\ldots;2^{99};2^{100}\}$, состоящее из первых ста степеней числа 2?

в) Сколько хороших подмножеств, состоящих из шести чисел, имеется у множества $\{2;3;4;5;6;7;8;9;16;17;18;19\}$?

Решение.

а) Предположим, что множество $\{1;2;3;\ldots 99;100\}$ можно разбить на два подмножества A и B, произведения всех чисел которых одинаковы, и пусть число 97 входит в множество A. Число 97 является простым, и на него не делится ни одно из чисел, входящих в множество B, поэтому произведение всех чисел из множества B не делится на 97. Так как произведение всех чисел из A делится на 97 (число 97 входит в A), а произведение всех чисел из B не делится на 97, то эти произведения не могут быть равны. То есть наше предположение не верно, и множество $\{1;2;3;\ldots 99;100\}$ не является хорошим.

б) При перемножении степеней с одинаковым основанием их показатели суммируются. Поэтому вопрос о «хорошести» множества $\{2;4;8;$

$\ldots 2^{99}; 2^{100}\}$ равносилен такому вопросу: можно ли разбить множество показателей перечисленных степеней 2, т.е. множество $\{1; 2; 3; \ldots 99; 100\}$, на два подмножества с одинаковой суммой чисел?

Заметим, что $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, $4+97=101$, $\ldots$, $50+51=101$. Таким образом, множество $\{1; 2; 3; \ldots 99; 100\}$ разбивается на 50 пар чисел, в каждой из которых сумма чисел равна 101. Включив в множество A любые 25 из этих пар, а в множество B оставшиеся 25 пар, мы получим разбиение множества $\{1; 2; 3; \ldots 99; 100\}$ на два подмножества с одинаковой суммой чисел. Следовательно, множество $\{2; 4; 8; \ldots 2^{99}; 2^{100}\}$ является хорошим.

в) Число 5 является простым, и ни одно из других чисел данного в условии множества не делится на 5. Поэтому любое хорошее подмножество множества $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 17; 18; 19\}$ не должно содержать число 5 (если взять любое подмножество, содержащее число 5, то при попытке разбить его на два подмножества с одинаковым произведением чисел, мы получим такое же противоречие, как и в пункте а): произведение чисел одного подмножества будет делиться на 5, а другого — нет).

Аналогичным образом, любое хорошее подмножество множества $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 16; 17; 18; 19\}$ не должно содержать чисел 7, 17 и 19.

Заметим, что все оставшиеся числа данного в условии множества представляют собой различные степени чисел 2 и 3 или их произведения:

$$2=2^1,\ 3=3^1,\ 4=2^2,\ 6=2\cdot 3,\ 8=2^3,\ 9=3^2,\ 16=2^4,\ 18=2\cdot 3^2.$$

Для нахождения в этом множестве, содержащем 8 чисел, всех хороших подмножеств, состоящих из 6 чисел, поступим следующим образом: определим, какие два числа можно исключить, чтобы множество оставшихся чисел было хорошим. Пусть C — одно из таких хороших множеств, т.е. оно разбивается на два подмножества A и B с одинаковым произведением чисел, которое мы обозначим через p. Тогда произведение всех чисел множества C равно p^2, т.е. содержит чётную степень числа 2 и чётную степень числа 3. Заметим, что

$$2\cdot 3\cdot (2^2)\cdot (2\cdot 3)\cdot (2^3)\cdot (3^2)\cdot (2^4)\cdot (2\cdot 3^2)=2^{12}\cdot 3^6.$$

Следовательно, исключаемые два числа должны быть такими, чтобы их произведение также содержало чётную степень числа 2 и чётную степень числа 3. Исходя из этого, для пары исключаемых чисел получаем следующие возможные варианты:

1) 2 и 2^3; 2) 2 и $2\cdot 3^2$; 3) 2^2 и 3^2
4) 2^2 и 2^4; 5) 2^3 и $2\cdot 3^2$; 6) 3^2 и 2^4;

(легче всего перечислить все эти варианты и убедиться, что других нет, следующим образом: в качестве одного исключаемого числа брать поочерёдно одно из чисел $2,\ 3,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 2^3,\ 3^2,\ 2^4,\ 2\cdot 3^2$ и пытаться подобрать к нему пару так, чтобы выполнялось требуемое условие чётности для степеней 2 и 3).

Покажем, что для каждого из 6 перечисленных выше вариантов исключаемой пары чисел, множество оставшихся чисел действительно является хорошим.

1) Исключаемые числа 2 и 2^3:
множество оставшихся чисел $C=\{3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 3^2;\ 2^4;\ 2\cdot 3^2\}$,
произведение чисел множества C равно $(2^{12}\cdot 3^6):(2\cdot 2^3)=2^8\cdot 3^6$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^4\cdot 3^3$ в каждом из них: $A=\{3;\ 3^2;\ 2^4\}$, $B=\{2^2;\ 2\cdot 3;\ 2\cdot 3^2\}$.

2) Исключаемые числа 2 и $2\cdot 3^2$:
множество оставшихся чисел $C=\{3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 3^2;\ 2^4\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^5\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{2^2;\ 2^3;\ 3^2\}$, $B=\{3;\ 2\cdot 3;\ 2^4\}$.

3) Исключаемые числа 2^2 и 3^2:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 2^4;\ 2\cdot 3^2\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^5\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{2^4;\ 2\cdot 3^2\}$, $B=\{2;\ 3;\ 2\cdot 3;\ 2^3\}$.

4) Исключаемые числа 2^2 и 2^4:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 3^2;\ 2\cdot 3^2\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^3\cdot 3^3$ в каждом из них: $A=\{2;\ 2\cdot 3;\ 2\cdot 3^2\}$, $B=\{3;\ 2^3;\ 3^2\}$.

5) Исключаемые числа 2^3 и $2\cdot 3^2$:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 3^2;\ 2^4\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^4\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{3^2;\ 2^4\}$, $B=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3\}$.

6) Исключаемые числа 3^2 и 2^4:
множество оставшихся чисел $C=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3;\ 2^3;\ 2\cdot 3^2\}$,
разбиение множества C на подмножества A и B с произведением чисел $2^4\cdot 3^2$ в каждом из них: $A=\{2^3;\ 2\cdot 3^2\}$, $B=\{2;\ 3;\ 2^2;\ 2\cdot 3\}$.

Приведённые примеры показывают, что все шесть перечисленных множеств C действительно являются хорошими.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.