Учебные пособия АНО «Издательский дом «Народное образование»
допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях
Приказом Минобрнауки России № 16 от 16.01.2012

Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева

ГЕОМЕТРИЯ
7–8 КЛАСС
ПОДГОТОВКА К ОГЭ
Тематические тесты и упражнения

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2018

Содержание

От авторов

Настоящее пособие может служить в качестве дополнительного задачника к любому из учебников по геометрии, входящих в Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию в общеобразовательных учреждениях (например, указанных в списке литературы на стр. 192). Но наиболее удачно это пособие дополняет самый распространённый из учебников — «Геометрия 7-9» авторов Атанасяна Л.С., Бутузова В.Ф. и др.

Все задачи пособия разбиты на семь параграфов, каждый из которых соответствует одной из тем, изучаемых по учебнику Атанасяна в 7-8 классе. При том, что соответствие последовательности предлагаемых в этом пособии задач с порядком изложения теоретического материала в учебнике Атанасяна очень значительное, есть и некоторые отличия. Ниже мы перечисляем все эти отличия, приводя методическое обоснование каждого из них.

1) Задачи, относящиеся к главе II «Треугольники» и главе IV «Соотношения между сторонами и углами треугольника» учебника Атанасяна, помещены в §3, а задачи, относящиеся к главе III «Параллельные прямые», помещены в §2. Параллельность прямых относится к «основным понятиям геометрии», поэтому вполне оправданно ввести это понятие и сформулировать свойства и признаки параллельности ранее темы «Треугольники», отложив доказательство этих свойств на потом. Плюс такого изложения в том, что не приходится прерывать тему «Треугольники» — изложение материала глав II и IV можно объединить в одну главу.

2) Задачи, относящиеся к главе VII «Подобные треугольники» учебника Атанасяна, помещены в §4. В §5 содержатся задачи на теорему Пифагора, которая в учебнике приведена в главе VI «Площадь», а задачи к главе VI «Площадь» даны в §6. Такая перестановка изучаемых тем местами (тема «Подобные треугольники» ра-

нее темы «Площадь») позволяет как можно раньше ввести понятие синуса и косинуса угла треугольника и при изучении темы «Площадь» сразу дать формулу площади треугольника $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, а не возвращаться к этой формуле позднее. При этом доказательство первого признака подобия треугольников можно осуществить посредством обобщённой теоремы Фалеса, что гораздо нагляднее, чем приведённое в учебнике Атанасяна доказательство с привлечением понятия площади.

3) В §7 Окружность дополнительно включены задачи на формулы длины окружности и площади круга, которые по учебнику Атанасяна изучаются в конце 9-го класса. Обоснавание этих формул не занимает слишком много времени, а весь необходимый для этого теоретический материал к концу 8 класса уже изучен. Поэтому нет никаких причин, чтобы не рассматривать задачи на эти формулы уже в конце 8 класса.

Важной особенностью данного пособия является то, что в него вошли большинство задач и идей, используемых в наши дни при составлении экзаменационных заданий по планиметрии. Таким образом, это пособие дополняет учебники из федерального перечня в том, что касается непосредственной подготовки к выпускным экзаменам в 9-ом и 11-ом классе (подготовки к задачам ОГЭ и ЕГЭ по планиметрии).

Авторы построили список задач так, что внутри каждой микротемы сложность заданий постепенно возрастает — от самых простых, доступных всем ученикам, до весьма сложных, предназначенных исключительно для отличников (все такие задачи помечены символом *). Таким образом, данное пособие является трёхуровневым — рассчитанным и на «троечников», и на «хорошистов», и на «отличников».

Во второй части пособия приведены решения наиболее сложных задач, а также тех заданий, которые быть может и не трудны, но являются важными для раскрытия изучаемой темы (по этой же причине — необходимости раскрытия темы, в списке задач встречаются такие, которые присутствуют и в самом учебнике Атанасяна).

Почти после каждого параграфа дана контрольная работа, содержащая 10 вариантов, в каждом из которых по 5 заданий. Исключения составляют §2 и §4, малочисленность доступных задач по этим темам (т.е. таких, которые могут быть вынесены на контрольную) не позволила сформировать вариант из 5 заданий. Поэтому контрольная к §2 объединена с контрольной к §3, а контрольная к §4 объединена с контрольной к §5.

Отметим, что все контрольные работы также являются трёхуровневыми по сложности заданий. В каждой контрольной работе тесты 1-4 составлены таким образом, чтобы учащиеся, освоившие проверяемый материал на удовлетворительном уровне, смогли решить 2-3 задания и подтвердить свою оценку. Аналогично тесты 5-8 составлены так, чтобы учащиеся, освоившие проверяемый материал на «хорошо», подтвердили свои оценки, решив 3-4 задания. Тесты 9-10 отмечены символом *, который означает, что они повышенного уровня сложности. Эти тесты предназначены для учащихся, успевающих на «отлично». Безошибочное решение всех пяти заданий из тестов 9-10 займёт значительное количество времени и у самых сильных учеников, поэтому во время контрольной работы им некогда будет отвлекаться и помогать слабоуспевающим.

Авторы выражают уверенность в том, что регулярные занятия по этому пособию будут способствовать повышению общего уровня математической грамотности и развитию геометрической интуиции учащихся.

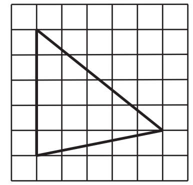
Для дальнейшего, более глубокого изучения геометрии (на уровне заключительных этапов всеросиийской математической олим- пиады) рекомендуем Вам книгу В.В. Прасолова «Задачи по планиметрии: в 2 частях», см. [6] в списке литературы.

Авторы благодарят рецензентов за прочтение рукописи и ценные замечания.

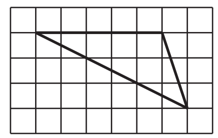
§ 6. Площадь

6.1. Задачи на вычисления

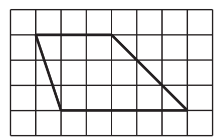
1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



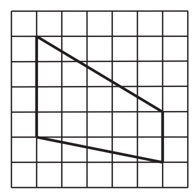
2. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



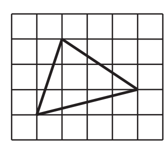
3. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



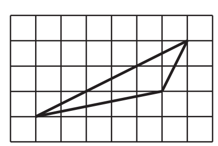
4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



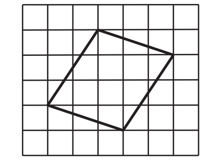
5. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



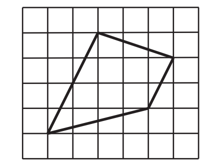
6. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



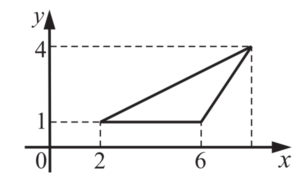
7. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



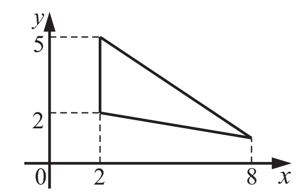
8. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,см \times 1\,см$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



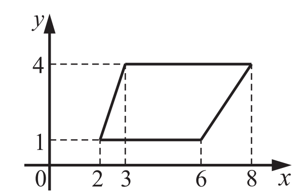
9. Найдите площадь треугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



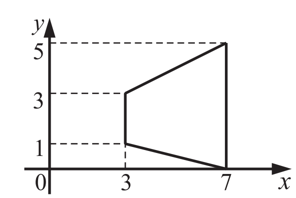
10. Найдите площадь треугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



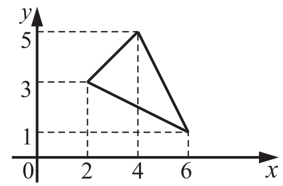
11. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



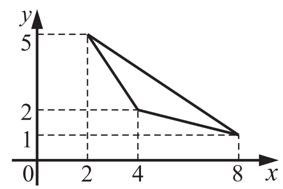
12. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



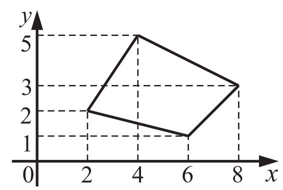
13. Найдите площадь треугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



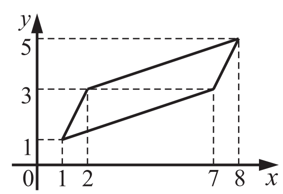
14. Найдите площадь треугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



15. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



16. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



17. Найдите площадь параллелограмма, если длина одной из его сторон равна 9, длина другой равна 12, а один из углов равен $30°$.

18. Найдите площадь параллелограмма, если длина одной из его сторон равна $5\sqrt{3}$, длина другой равна 8, а один из углов равен $60°$.

19. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 15, а один из углов равен $150°$.

20. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны $6\sqrt{2}$ и 14, а угол между этими сторонами равен $135°$.

21. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны $4\sqrt{3}$ и 12, а угол между этими сторонами равен $120°$.

22. Найдите длину стороны ромба, если его площадь равна $32\sqrt{2}$, а один из углов равен $45°$.

23. Найдите градусную меру острого угла ромба, если его площадь равна 72, а длина стороны равна 12.

24. Найдите градусную меру тупого угла параллелограмма, если его площадь равна 60, а длины двух его сторон равны 8 и 15.

25. Чему может быть равна градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что его площадь равна 25, а длина боковой стороны равна 10?

26. Чему может быть равна градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что его площадь равна 98, а длина боковой стороны равна 14?

27. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если длина его боковой стороны равна 25, а длина основания равна 48.

28. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если длина его боковой стороны равна 26, а длина высоты, проведённой к основанию, равна 24.

29. Найдите длину боковой стороны равнобедренного треугольника, если его площадь равна 480, а длина основания равна 32.

30. Найдите длину боковой стороны равнобедренного треугольника, если его площадь равна 420, а длина высоты, проведённой к основанию, равна 35.

31. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 12 и 21.

32. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 11 и 13.

33. Площадь ромба равна 135, а одна из его диагоналей равна 15. Найдите другую диагональ ромба.

34. Площадь ромба равна 110, а одна из его диагоналей равна 10. Найдите другую диагональ ромба.

35. Площадь ромба равна 840, а одна из его диагоналей равна 42. Найдите периметр ромба.

36. Периметр ромба равен 164, а одна из его диагоналей равна 80. Найдите площадь ромба.

37. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 25, а одна из сторон ровно в четыре раза больше другой стороны.

38. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 192, а отношение длин соседних сторон равно $3:4$.

39. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 126, а разность между большей и меньшей сторонами равна 5.

40. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 228, а разность между большей и меньшей сторонами равна 7.

41. Найдите площадь трапеции, если длины её оснований равны 17 и 25, а высота равна 9.

42. Одно из оснований трапеции равно 27, высота равна 8, а площадь равна 176. Найдите второе основание этой трапеции.

43. Высота трапеции равна 6, а площадь равна 192. Найдите длину средней линии этой трапеции.

44. Средняя линия трапеции равна 22, а площадь равна 352. Найдите высоту этой трапеции.

45. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 50, а её площадь равна 580. Найдите длину боковой стороны этой трапеции.

46. Основания равнобедренной трапеции равны 22 и 58, а её площадь равна 960. Найдите периметр этой трапеции.

47. Основания равнобедренной трапеции равны 23 и 47, а её периметр равен 96. Найдите площадь этой трапеции.

48. Основания равнобедренной трапеции равны 18 и 34, а её периметр равен 86. Найдите площадь этой трапеции.

49. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $3:5$, а площадь большего из них равна 30. Найдите площадь меньшего многоугольника.

50. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $4:7$, а площадь меньшего из них равна 40. Найдите площадь большего многоугольника.

51. Площади двух подобных многоугольников относятся как $9:16$. Периметр большего многоугольника равен 28. Найдите периметр меньшего многоугольника.

52. Площади двух подобных многоугольников относятся как $4:25$. Периметр меньшего многоугольника равен 11. Найдите периметр большего многоугольника.

53. Площадь треугольника ABC равна 76, отрезок MN — средняя линия треугольника, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CMN.

54. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Площадь треугольника CMN равна 16. Найдите площадь треугольника ABC.

55. Площадь треугольника ABC равна 45. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен стороне AB, причём $MN:AB = 2:3$. Найдите площадь треугольника CMN.

56. На сторонах AC, BC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N так, что $AM:CM = BN:CN = 4:5$. Площадь треугольника CMN равна 15. Найдите площадь треугольника ABC.

57. Площадь треугольника ABC равна 75. На стороне AB взята точка M так, что $AM:BM = 3:7$. Найдите площадь треугольника AMC.

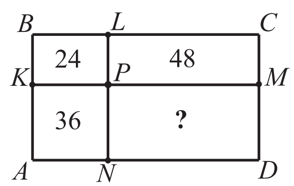
58. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $AM : BM = 5 : 8$. Площадь треугольника AMC равна 10. Найдите площадь треугольника ABC.

59. Площадь треугольника ABC равна 100. На сторонах AC и BC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : CM = 8 : 7$, $BN : CN = 2 : 3$. Найдите площадь треугольника CMN.

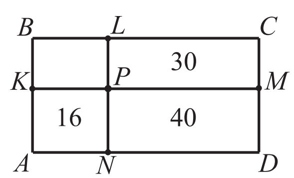
60. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : CM = 3 : 4$, $BN : CN = 5 : 6$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника CMN равна 72.

В задачах 61-66 следующая часть условия является общей: «Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка P. Через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам прямоугольника и пересекающие их в точках K, L, M, N.»

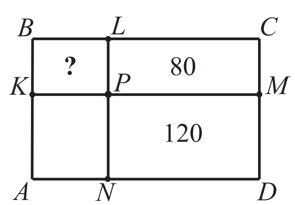
61. Известны площади прямоугольников $AKPN$, $BKPL$, $CLPM$ — см. данный справа рисунок. Найдите площадь прямоугольника $DNPM$.



62. Известны площади прямоугольников $AKPN$, $DMPN$, $CLPM$ — см. данный справа рисунок. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.

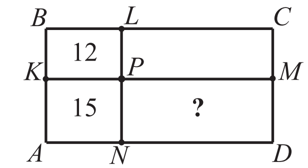


63. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 300. Известны площади прямоугольников $DNPM$ и $CLPM$ — см. данный справа рисунок. Найдите площадь прямоугольника $BKPL$.

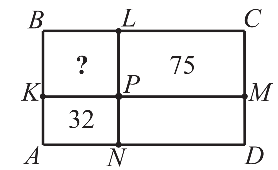


64. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 90. Известны площа-

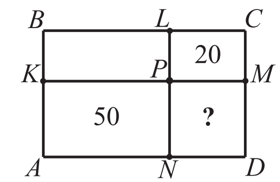
ди прямоугольников $AKPN$ и $BKPL$, см. данный справа рисунок. Найдите площадь прямоугольника $DNPM$.



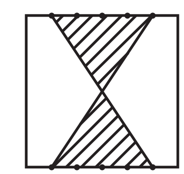
65. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 207. Известны площади прямоугольников $AKPN$ и $CLPM$ — см. данный справа рисунок. Чему может быть равна площадь прямоугольника $BKPL$?



66. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 135. Известны площади прямоугольников $AKPN$ и $CLPM$ — см. данный справа рисунок. Чему может быть равна площадь прямоугольника $DMPN$?

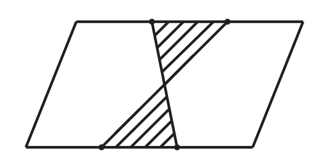


67. Две противоположные стороны квадрата разделены на шесть равных частей, крайние точки деления соединены накрест отрезками и часть квадрата, ограниченная этими отрезками, заштрихована — см. данный справа рисунок.



а) Площадь всего квадрата равна 69. Найдите площадь заштрихованной части квадрата.
б) Площадь заштрихованной части квадрата равна 243. Найдите длину стороны квадрата.

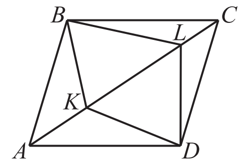
68. Две противоположные стороны параллелограмма разделены на три равные части, крайние точки деления соединены накрест отрезками и часть параллелограмма, ограниченная этими отрезками, заштрихована — см. данный справа рисунок.



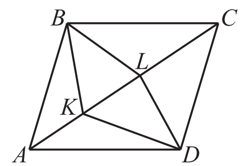
а) Площадь всего параллелограмма равна 228. Найдите площадь

заштрихованной части параллелограмма.
б) Площадь заштрихованной части параллелограмма равна 14. Найдите высоту параллелограмма, если его сторона равна 12.

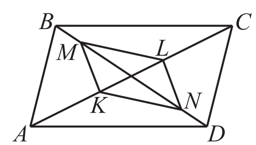
69. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взяты точки K и L так, что $AK = 0{,}3AC$, $CL = 0{,}2AC$, см. рисунок. Найдите площадь четырёхугольника $BLDK$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 69.



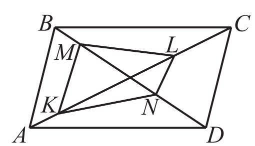
70. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взяты точки K и L так, что $AK = \frac{2}{7}AC$, $CL = \frac{5}{12}AC$, см. рисунок. Найдите площадь четырёхугольника $BLDK$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 168.



71.* В параллелограмме $ABCD$ на диагоналях AC и BD взяты соответственно пары точек K, L и M, N так, что $AK = CL = \frac{1}{3}AC$, $BM = DN = \frac{1}{6}BD$, см. рисунок. Найдите площадь четырёхугольника $KMLN$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 108.

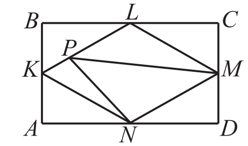


72.* В параллелограмме $ABCD$ на диагоналях AC и BD взяты соответственно пары точек K, L и M, N так, что $AK = \frac{1}{7}AC$, $CL = \frac{2}{7}AC$, $BM = \frac{1}{6}BD$, $DN = \frac{1}{3}BD$, см. рисунок. Найдите площадь четырёхугольника $KMLN$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 14.

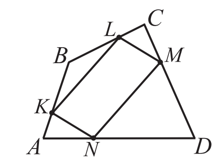


73. Точки K, L, M, N — середины сторон прямоугольника $ABCD$, точка P принадлежит отрезку KL, см. рисунок к следующей задаче. Найдите площадь треугольника MNP, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 15.

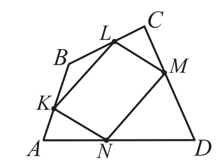
74. Точки K, L, M, N — середины сторон прямоугольника $ABCD$, точка P принадлежит отрезку KL, см. рисунок. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если площадь треугольника MNP равна 47.



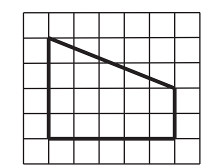
75.* На сторонах четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N так, что $\frac{AK}{BK} = \frac{AN}{DN} = \frac{CL}{BL} = \frac{CM}{DM} = \frac{1}{2}$, см. рисунок. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, если площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 117.



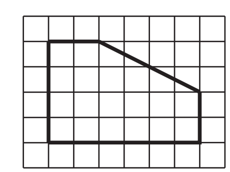
76.* На сторонах четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N так, что $\frac{AK}{BK} = \frac{AN}{DN} = \frac{CL}{BL} = \frac{CM}{DM} = \frac{5}{7}$, см. рисунок. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если площадь четырёхугольника $KLMN$ равна 77.



77.* На клетчатой бумаге с размером клеток 1 см × 1 см изображён план городского сквера, см. рисунок (территория сквера обведена жирной линией). Определите масштаб этого изображения, если известно, что площадь сквера составляет 60 га (1 га = 10000 м^2).



78.* На клетчатой бумаге с размером клеток 5 мм × 5 мм изображён план продовольственного рынка, см. рисунок (территория рынка обведена жирной линией). Определите масштаб этого изображения, если известно, что площадь рынка равна 1,8 га (1 га = 10000 м^2).



79.* В треугольнике ABC на сторонах AB, AC и BC взяты соответственно точки M, N и K так, что четырёхугольник $AMKN$ является параллелограммом, площадь которого составляет $\frac{3}{8}$ площади треугольника ABC. Найдите длину стороны AC, если известно, что $MK = 6$.

80.* В треугольнике ABC на стороне AB взяты точки M и N, а на сторонах BC и AC взяты точки P и Q так, что четырёхугольник $MNPQ$ является параллелограммом, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите длину стороны AB, если известно, что $MN = 1$.

6.2. Задачи на доказательство

81. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольно точку M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна половине площади трапеции.

82. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольно точку M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна сумме площадей треугольников BCM и ADM.

83. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что произведение площадей треугольников ABP и CDP равно произведению площадей треугольников BCP и ADP.

84. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников ABP и CDP равны.

85. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что если площади треугольников ABP и CDP равны, то стороны BC и AD параллельны.

86. Точка M — середина стороны AB четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника MCD равна полусумме площадей треугольников ACD и BCD.

87. Точка M — середина стороны AB четырёхугольника $ABCD$. Площадь треугольника MCD равна половине площади четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

88. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD, S — площадь этой трапеции, d — расстояние от середины боковой стороны AB до прямой CD. Докажите, что $S = d \cdot CD$.

89.* На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята точка K так, что $\frac{AK}{BK} = k$ (k — некоторое положительное число). Обозначим через S_A, S_B и S_K площади треугольников ACD, BCD и KCD соответственно. Докажите, что $S_K = S_A \cdot \frac{1}{1+k} + S_B \cdot \frac{k}{1+k}$.

90.* На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки P и Q так, что площади треугольников CDP и ABQ равны. Докажите, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции.

Контрольная работа.

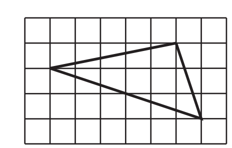
Рекомендуемое время для выполнения работы 30 минут.

Рекомендумая шкала оценивания результатов:

число верных решений	0-1	2-3	4	5
школьная оценка	2	3	4	5

Вариант 1

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь параллелограмма, если длина одной из его сторон равна 13, длина другой равна 17, а один из углов равен 150°.

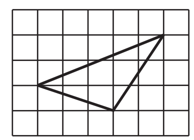
3. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 45, а одна из сторон ровно в пять раз больше другой стороны.

4. Одно из оснований трапеции равно 14, высота равна 6, а площадь равна 90. Найдите второе основание этой трапеции.

5. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $4:5$, а площадь большего из них равна 20. Найдите площадь меньшего многоугольника.

Вариант 2

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,\text{см} \times 1\,\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь параллелограмма, если длина одной из его сторон равна 12, длина другой равна $21\sqrt{2}$, а один из углов равен $135°$.

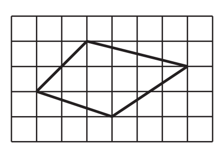
3. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 90, а одна из сторон в 3,6 раза меньше другой стороны.

4. Одно из оснований трапеции равно 11, высота равна 9, а площадь равна 144. Найдите второе основание этой трапеции.

5. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $4:7$, а площадь меньшего из них равна 48. Найдите площадь большего многоугольника.

Вариант 3

1. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,\text{см} \times 1\,\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны $14\sqrt{3}$ и 7, а угол между этими сторонами равен $60°$.

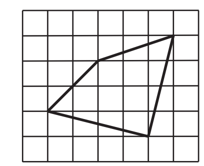
3. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 250, а отношение длин соседних сторон равно $5:8$.

4. Высота трапеции равна 6, а площадь равна 174. Найдите длину средней линии этой трапеции.

5. Площади двух подобных многоугольников относятся как $4:49$. Периметр большего многоугольника равен 105. Найдите периметр меньшего многоугольника.

Вариант 4

1. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге, имеющей размер клеток $1\,\text{см} \times 1\,\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны $3\sqrt{2}$ и 15, а угол между этими сторонами равен $45°$.

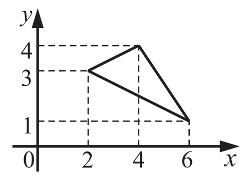
3. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 63, а отношение длин соседних сторон равно $4:7$.

4. Средняя линия трапеции равна 34, а площадь равна 221. Найдите высоту этой трапеции.

5. Площади двух подобных многоугольников относятся как $9:25$. Периметр меньшего многоугольника равен 12. Найдите периметр большего многоугольника.

Вариант 5

1. Найдите площадь треугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



2. Найдите длину стороны ромба, если его площадь равна $72\sqrt{3}$, а один из углов равен 120°.

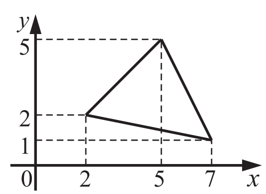
3. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 40, а разность длин большей и меньшей сторон равна 6.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 30, а её площадь равна 330. Найдите периметр этой трапеции.

5. Площадь треугольника ABC равна 50. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен стороне AB, причём $MN : AB = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника CMN.

Вариант 6

1. Найдите площадь треугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



2. Найдите синус угла ромба, если длина его стороны равна 18, а площадь равна 81.

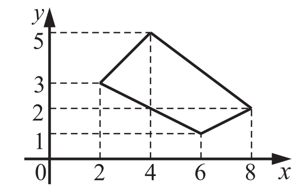
3. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 176, а разность длин большей и меньшей сторон равна 5.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 18 и 32, а её площадь равна 600. Найдите периметр этой трапеции.

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен стороне AB и $MN : AB = 5 : 6$. Площадь треугольника CMN равна 20. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант 7

1. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



2. Найдите площадь ромба, если его высота равна 5, а один из углов равен 150°.

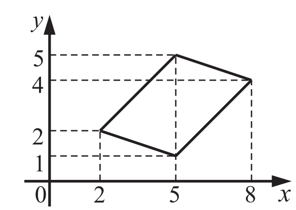
3. Периметр прямоугольника равен 48, а площадь равна 119. Найдите большую сторону прямоугольника.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 22 и 32, а её периметр равен 80. Найдите площадь этой трапеции.

5. Площадь треугольника ABC равна 27. На сторонах AC и BC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : CM = BN : CN = 7 : 8$. Найдите площадь треугольника CMN.

Вариант 8

1. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого в координатной плоскости на данном справа рисунке.



2. Найдите площадь ромба, если его высота равна $\sqrt[4]{3}$, а один из углов равен 120°.

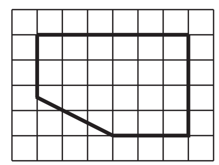
3. Периметр прямоугольника равен 42, а площадь равна 104. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 41, а её периметр равен 88. Найдите площадь этой трапеции.

5. На сторонах AC, BC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N так, что $AM:CM = BN:CN = 3:2$. Площадь треугольника CMN равна 18. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант 9*

1. На клетчатой бумаге, имеющей размер клеток 5 мм × 5 мм, изображён план городского сквера, см. рисунок (территория сквера обведена жирной линией). Определите масштаб этого изображения, если известно, что площадь сквера составляет 87 га (1 га = 10000 м^2).



2. Площадь треугольника ABC равна 36. Чему может быть равен косинус угла ABC, если $AB = 3\sqrt{6}$, $BC = 10$?

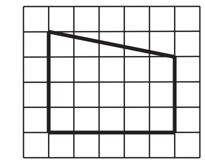
3. Периметр прямоугольника равен 28, а длина диагонали равна 11. Найдите площадь прямоугольника.

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ известны длины оснований и боковых сторон: $BC = 6$, $AD = 24$, $AB = CD = 41$. Пусть P — точка пересечения диагоналей AC и BD. Найдите площадь треугольника BCP.

5. Площадь треугольника ABC равна 45. На сторонах AC и BC взяты соответственно точки M и N так, что $AM:CM = 4:9$, $BN:CN = 5:13$. Найдите площадь треугольника AMN.

Вариант 10*

1. На клетчатой бумаге, имеющей размер клеток 5 мм × 5 мм, изображён план продовольственного рынка, см. рисунок (территория рынка обведена жирной линией). Определите масштаб этого изображения, если известно, что площадь рынка равна 6,3 га (1 га = 10000 м^2).



2. Площадь треугольника ABC равна 42. Чему может быть равен тангенс угла ABC, если $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 15$?

3. Периметр прямоугольника равен 34, а длина диагонали равна 13. Найдите площадь прямоугольника.

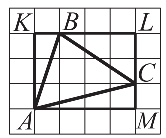
4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ известны длины оснований и боковых сторон: $BC = 12$, $AD = 36$, $AB = CD = 37$. Пусть P — точка пересечения диагоналей AC и BD. Найдите площадь треугольника ABP.

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и N так, что $AM:CM = 2:7$, $BN:CN = 8:3$. Площадь треугольника AMN равна 22. Найдите площадь треугольника ABC.

Решения к § 6 (площадь)

Номера задач, к которым приведены решения: **5, 59, 61, 65, 72, 75, 77, 79, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90.**

5. Вершины данного треугольника обозначим через A, B, C и заметим, что треугольник ABC «вписан» в прямоугольник $AKLM$, см. данный ниже рисунок.



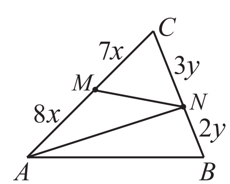
Так как прямоугольник $AKLM$ составлен из треугольников ABC, ABK, BCL и ACM, то его площадь равна сумме площадей этих треугольников. Поэтому искомая площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = S_{AKLM} - S_{ABK} - S_{BCL} - S_{ACM}$, где $S_{AKLM} =$ $= AK \cdot AM = 3 \cdot 4 = 12,\ S_{ABK} = \frac{1}{2} AK \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1{,}5,$ $S_{BCL} = \frac{1}{2} BL \cdot CL = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3,\ S_{ACM} = \frac{1}{2} AM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2.$ Итак, $S_{ABC} = 12 - 1{,}5 - 3 - 2 = 5{,}5.$

Ответ: 5,5

59. Решим задачу двумя способами.

Способ 1.

Пусть $AM = 8x,\ BN = 2y$, тогда из данных в условии отношений следует, что $CM = 7x,\ CN = 3y$, см. данный ниже рисунок.



Так как у треугольников ACN и ABC высота из вершины A общая, то отношение площадей этих треугольников равно отноше-

нию оснований CN и BC, т.е. $\frac{S_{ACN}}{S_{ABC}} = \frac{CN}{BC} = \frac{3y}{5y} = \frac{3}{5}$. Отсюда находим, что $S_{ACN} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60.$

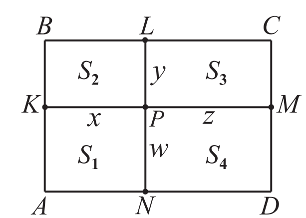
У треугольников CMN и CAN общая высота из вершины N, поэтому отношение их площадей равно отношению $CM : CA$. Из равенства $\frac{S_{CMN}}{S_{CAN}} = \frac{CM}{CA} = \frac{7x}{15x} = \frac{7}{15}$ получаем, что $S_{CMN} =$ $= \frac{7}{15} S_{ACN} = \frac{7}{15} \cdot 60 = 28.$

Способ 2.

Для нахождения площади треугольника CMN воспользуемся формулой $S_{CMN} = \frac{1}{2} CM \cdot CN \cdot \sin\angle MCN$. Площадь треугольника ABC согласно этой формуле равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACB$. А поскольку $\angle MCN$ и $\angle ACB$ — это один и тот же угол, т.е. $\sin\angle MCN = \sin\angle ACB$, то $\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{CM \cdot CN}{AC \cdot BC} = \frac{7x \cdot 3y}{15x \cdot 5y} = \frac{7}{25}$. Отсюда получаем, что $S_{CMN} = \frac{7}{25} S_{ABC} = \frac{7}{25} \cdot 100 = 28.$

Ответ: 28

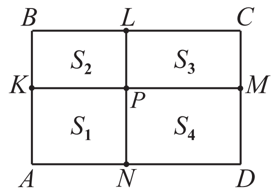
61. Пусть $PK = x,\ PL = y,\ PM = z,\ PN = w$, см. данный ниже рисунок. Тогда для площадей прямоугольников, на которые прямоугольник $ABCD$ разбит прямыми KM и LN, имеем равенства: $S_1 = x \cdot w,\ S_2 = x \cdot y,\ S_3 = y \cdot z,\ S_4 = z \cdot w.$



Перемножая первое из этих равенств с третьим, а второе — с четвёртым, получаем: $S_1 \cdot S_3 = x \cdot w \cdot y \cdot z,\ S_2 \cdot S_4 = x \cdot y \cdot z \cdot w.$ Отсюда видим, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Так как по условию $S_1 = 36,$ $S_2 = 24,\ S_3 = 48,$ то $S_4 = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2} = \frac{36 \cdot 48}{24} = 72.$

Ответ: 72

65. Площади прямоугольников, на которые прямоугольник $ABCD$ разбит прямыми KM и LN, обозначим через S_1, S_2, S_3 и S_4, см. данный ниже рисунок. Тогда $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ — этот факт доказан в решении задачи №61 данного параграфа.



Так как по условию $S_1 = 32$, $S_3 = 75$, а площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ и равна по условию 207, то для неизвестных S_2 и S_4 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} S_2 + S_4 + 32 + 75 = 207 \\ S_2 \cdot S_4 = 32 \cdot 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_2 + S_4 = 100 \\ S_2 \cdot S_4 = 2400. \end{cases}$$

Выразив S_4 через S_2 из первого уравнения и подставив во второе уравнение, получим: $S_2 \cdot (100 - S_2) = 2400$, $S_2^2 - 100S_2 + 2400 = 0$, откуда $S_2 = 40$ или $S_2 = 60$.

Ответ: 40 или 60

72. Воспользуемся следующей формулой для площади S произвольного выпуклого четырёхугольника: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$, где d_1, d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, а $\sin\alpha$ — синус угла между диагоналями. Пусть α — угол между диагоналями AC и BD параллелограмма $ABCD$. Тогда, согласно указанной выше формуле, площадь $ABCD$ равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, а площадь $KMLN$ равна $S_{KMLN} = \frac{1}{2} KL \cdot MN \cdot \sin\alpha$. Отсюда следует, что $\frac{S_{KMLN}}{S_{ABCD}} = \frac{KL \cdot MN}{AC \cdot BD}$.

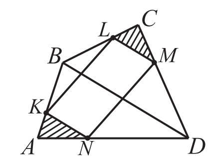
Так как по условию $AK = \frac{1}{7} AC$, $CL = \frac{2}{7} AC$, то $KL = AC - AK - CL = \frac{4}{7} AC$. А из равенств $BM = \frac{1}{6} BD$ и $DN = \frac{1}{3} BD$, данных в условии, получаем:

$$MN = BD - BM - DN = BD \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} BD.$$

Таким образом, $\frac{S_{KMLN}}{S_{ABCD}} = \frac{KL}{AC} \cdot \frac{MN}{BD} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$, откуда $S_{KMLN} = \frac{2}{7} S_{ABCD} = \frac{2}{7} \cdot 14 = 4$.

Ответ: 4

75. Так как из равенств $\frac{AK}{BK} = \frac{AN}{DN} = \frac{1}{2}$ следует, что $\frac{AK}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$, то треугольник AKN подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. Аналогично, треугольник CLM подобен треугольнику CBD с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$.



Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, поэтому $S_{AKN} = \frac{1}{9} S_{ABD}$, а $S_{CLM} = \frac{1}{9} S_{CBD}$. Складывая эти два равенства, получаем:

$$S_{AKN} + S_{CLM} = \frac{1}{9}\left(S_{ABD} + S_{CBD}\right) = \frac{S_{ABCD}}{9}.$$

(на приведённом выше рисунке площади треугольников AKN и CLM для наглядности заштрихованы).

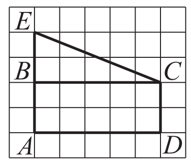
Аналогично, для площадей треугольников BKL и DNM получаем равенства: $S_{BKL} = \frac{4}{9} S_{BAC}$, $S_{DNM} = \frac{4}{9} S_{DAC}$ (треугольники BKL и BAC, а также DNM и DAC подобны с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$). Поэтому $S_{BKL} + S_{DNM} = \frac{4}{9}\left(S_{BAC} + S_{DAC}\right) = \frac{4}{9} S_{ABCD}$.

Заметим, что площадь четырёхугольника $KLMN$ может быть получена вычитанием из площади четырёхугольника $ABCD$ площадей треугольников AKN, CLM, BKL, DNM. Отсюда, принимая во внимание полученные равенства для сумм $S_{AKN} + S_{CLM}$

и $S_{BKL} + S_{DNM}$, находим, что $S_{KLMN} = S_{ABCD} - \frac{1}{9} S_{ABCD} - \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} \cdot 117 = 52$.

Ответ: 52

77. Площадь плана городского сквера равна сумме площадей прямоугольника $ABCD$ и прямоугольного треугольника BCE, см. данный ниже рисунок.



Так как $S_{ABCD} = AB \cdot CD = 10\,\text{см}^2$, а $S_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot BC = 5\,\text{см}^2$, то площадь плана городского сквера равна $15\,\text{см}^2$.

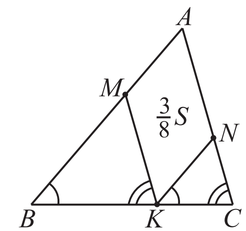
Выразим реальную площадь городского сквера, равную по условию 60 га, в см^2:

$$60\,\text{га} = 60 \cdot 10000\,\text{м}^2 = 60 \cdot 10000 \cdot (100\,\text{см} \cdot 100\,\text{см}) = 60 \cdot 10^8\,\text{см}^2.$$

Пусть k — коэффициент, показывающий, во сколько раз нужно увеличить план сквера, чтобы получить реальные размеры сквера. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Поэтому отношение площади сквера к площади плана сквера равно k^2. Следовательно, $\frac{60 \cdot 10^8\,\text{см}^2}{15\,\text{см}^2} = 4 \cdot 10^8 = k^2$, откуда $k = 2 \cdot 10^4 = 20000$. Таким образом, масштаб данного в условии изображения сквера равен $1:20000$.

Ответ: 1 : 20000

79. Пусть S — площадь треугольника ABC, тогда площадь параллелограмма $AMKN$ равна $\frac{3}{8} S$. Заметим, что поскольку прямая MK параллельна AC, а прямая NK параллельна AB, то треугольник BMK подобен треугольнику BAC, а $\triangle CNK$ подобен $\triangle CAB$, см. рисунок на следующей странице.



Коэффициент подобия $\triangle BMK$ и $\triangle BAC$, равный $\frac{BK}{BC}$, обозначим через k. Тогда коэффициент подобия $\triangle CNK$ и $\triangle CAB$ равен $\frac{CK}{BC} = \frac{BC - BK}{BC} = 1 - k$.

Так как отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то площади треугольников BMK и CNK относятся к площади S треугольника ABC как k^2 и $(1-k)^2$ соответственно. Поэтому $S_{BMK} = k^2 S$, $S_{CNK} = (1-k)^2 S$. Отсюда, учитывая равенство $S_{BMK} + S_{CNK} + S_{AMKN} = S$, получаем уравнение для нахождения k:

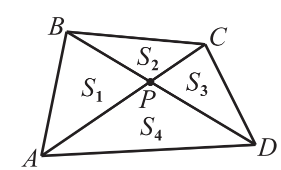
$$k^2 S + (1-k)^2 S + \frac{3}{8} S = S,\ 2k^2 - 2k + \frac{3}{8} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем, что $k = \frac{1}{4}$ или $k = \frac{3}{4}$.

Остаётся лишь заметить, что поскольку $\frac{MK}{AC} = k$, то $AC = \frac{1}{k} MK$ и, значит, $AC = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8$ или $AC = 4 \cdot 6 = 24$.

Ответ: 8 или 24

83. Площади треугольников ABP, BCP, CDP, ADP обозначим через S_1, S_2, S_3, S_4, см. данный ниже рисунок. По условию, нам требуется доказать равенство $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.



Пусть $\angle BPA = \alpha$, тогда $\angle BPC = 180^\circ - \alpha$ и по формуле площади треугольника имеем равенства:

$$S_1 = \frac{1}{2}\,BP \cdot AP \cdot \sin\alpha,\;\; S_2 = \frac{1}{2}\,BP \cdot CP \cdot \sin(180^\circ - \alpha),$$

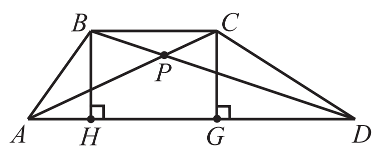
$$S_3 = \frac{1}{2}\,CP \cdot DP \cdot \sin\alpha,\;\; S_4 = \frac{1}{2}\,AP \cdot DP \cdot \sin(180^\circ - \alpha).$$

Перемножая первое из этих равенств с третьим, а второе — с четвёртым, получаем: $S_1 \cdot S_3 = \frac{1}{4}\,BP \cdot AP \cdot CP \cdot DP \cdot \sin^2\alpha$,

$$S_2 \cdot S_4 = \frac{1}{4}\,BP \cdot CP \cdot AP \cdot DP \cdot \sin^2(180^\circ - \alpha).$$

Так как $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, то правые части двух предыдущих равенств отличаются лишь порядком множителей, т.е. равны друг другу, а значит, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, что и требовалось доказать.

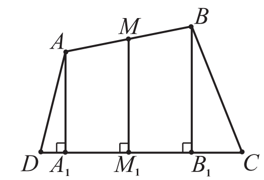
84. 1) Пусть BH и CG — высоты трапеции $ABCD$, см. рисунок. Тогда для площадей треугольников ABD и ACD имеем равенства: $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot CG$. Так как прямые BC и AD параллельны, то $BH = CG$ и, значит, $S_{ABD} = S_{ACD}$.



2) Заметим, что треугольник ABD составлен из треугольников ABP и APD, поэтому $S_{ABP} = S_{ABD} - S_{APD}$. Аналогично для треугольника CDP имеем: $S_{CDP} = S_{ACD} - S_{APD}$. Из этих равенств и равенства $S_{ABD} = S_{ACD}$ следует, что $S_{ABP} = S_{CDP}$, что и требовалось доказать.

86. Обозначим через S_M, S_A и S_B соответственно площади треугольников MCD, ACD и BCD. Нам требуется доказать, что $S_M = \frac{1}{2}\big(S_A + S_B\big)$.

Пусть A_1, B_1, M_1 — проекции точек A, B, M на прямую CD, см. данный ниже рисунок.



Прямые AA_1, BB_1 и MM_1 параллельны, поэтому отрезок MM_1 является средней линией трапеции A_1ABB_1. Отсюда следует, что $MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$. Так как AA_1, BB_1, MM_1 — высоты треугольников ACD, BCD, MCD, то для площадей этих треугольников имеем равенства: $S_A = \frac{1}{2}AA_1 \cdot CD$, $S_B = \frac{1}{2}BB_1 \cdot CD$, $S_M = \frac{1}{2}MM_1 \cdot CD$.

Сложив почленно первые два из этих равенств, получим:

$$S_A + S_B = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) \cdot CD = MM_1 \cdot CD = 2S_M.$$

Таким образом, $S_M = \frac{1}{2}\big(S_A + S_B\big)$, что и требовалось доказать.

87. Согласно результату предыдущей задачи имеем: $S_{MCD} = \frac{1}{2}(S_{ACD} + S_{BCD})$. Поэтому из данного в условии равенства $S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ следует, что

$$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{BCD} \;\;(1).$$

Заметим, что поскольку четырёхугольник $ABCD$ разрезается диагональю AC на треугольники ACD и ABC, то

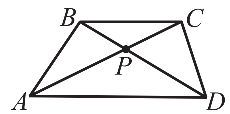
$$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} \;\;(2).$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $S_{BCD} = S_{ABC}$. Так как у треугольников BCD и ABC общая сторона BC, а их площади равны, то равны высоты этих треугольников, проведённых из вершин A и D к стороне BC.

Итак, нами доказано, что расстояние от точек A и D до прямой BC равны, а отсюда следует, что прямые AD и BC параллельны, что и требовалось доказать.

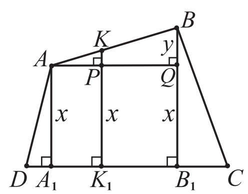
88. Пусть M — середина боковой стороны AB, а S_A, S_B, S_M — площади треугольников ACD, BCD и MCD соответственно. Так как расстояние d от точки M до прямой CD равно высоте треугольника MCD, то $S_M = \frac{1}{2}\, d \cdot CD$. В задаче №86 было доказано, что $S_M = \frac{1}{2}\,(S_A + S_B)$, поэтому нам достаточно доказать, что площадь трапеции $ABCD$ равна $S = S_A + S_B$ — тогда получим, что $S = 2S_M = d \cdot CD$.

Пусть P — точка пересечения диагоналей трапеции. Треугольник ACD составлен из треугольников APD и PCD, а треугольник BCD составлен из треугольников BPC и PCD, см. рисунок.



Следовательно, $S_A = S_{APD} + S_{PCD}$, $S_B = S_{BPC} + S_{PCD}$ и, значит, $S_A + S_B = S_{APD} + S_{BPC} + 2S_{PCD}$. Остаётся лишь заметить, что поскольку $S_{ABP} = S_{PCD}$ (этот факт установлен в задаче №84), то $S_A + S_B = S_{APD} + S_{BPC} + S_{PCD} + S_{ABP} = S$ — доказательство требуемого утверждения завершено.

89. Пусть A_1, B_1, K_1 — проекции точек A, B, K на прямую CD, AP и AQ — перпендикуляры к прямым KK_1 и BB_1. Длину отрезка AA_1 обозначим через x, а длину BQ — через y, см. данный ниже рисунок.



Из равенства $\frac{AK}{BK} = k$ и подобия треугольников AKP и ABQ следует, что $KP = \frac{k}{1+k} \cdot y$. Поэтому $KK_1 = x + \frac{k}{1+k} \cdot y$. Заметим, что $AA_1 \cdot \frac{1}{1+k} + BB_1 \cdot \frac{k}{1+k} = x \cdot \frac{1}{1+k} + (x+y) \cdot \frac{k}{1+k} = x + y \cdot \frac{k}{1+k}$. Таким образом, $AA_1 \cdot \frac{1}{1+k} + BB_1 \cdot \frac{k}{1+k} = KK_1$.

Умножив обе части этого равенства на величину $\frac{1}{2}\,DC$, получим требуемое равенство: $S_A \cdot \frac{1}{1+k} + S_B \cdot \frac{k}{1+k} = S_K$.

90. Пусть $\frac{AP}{BP} = p$, $\frac{DQ}{CQ} = q$, где p и q — некоторые числа, и пусть S_A, S_B, S_P — площади треугольников ACD, BCD, PCD соответственно, а S_C, S_D, S_Q — площади треугольников CAB, DAB, QAB. Тогда согласно результату предыдущей задачи имеем:

$$S_P = S_A \cdot \frac{1}{1+p} + S_B \cdot \frac{p}{1+p} \text{ и } S_Q = S_D \cdot \frac{1}{1+q} + S_C \cdot \frac{q}{1+q}.$$

Так как по условию $S_P = S_Q$, то получаем следующее равенство:

$$S_A \cdot \frac{1}{1+p} + S_B \cdot \frac{p}{1+p} = S_D \cdot \frac{1}{1+q} + S_C \cdot \frac{q}{1+q} \quad (*).$$

А поскольку $ABCD$ трапеция, то $S_A = S_D$ и $S_B = S_C$ (см. решение задачи №84). Из этих двух равенств и равенства $(*)$ следует, что $S_D \cdot \frac{1}{1+p} + S_C \cdot \frac{p}{1+p} = S_D \cdot \frac{1}{1+q} + S_C \cdot \frac{q}{1+q}$, откуда $S_D \cdot \frac{q-p}{(1+p)(1+q)} = S_C \cdot \frac{q-p}{(1+p)(1+q)}$, $(S_D - S_C) \cdot (q-p) = 0$.

Равенство $(S_D - S_C) \cdot (q-p) = 0$ может выполняться только в двух случаях: или $S_D = S_C$, или $p = q$. Если $S_D = S_C$, то прямые AB и CD параллельны (см. задачу №85), но это невозможно, поскольку боковые стороны трапеции по определению не параллельны друг другу. Следовательно, $p = q$. Отсюда по теореме, обратной теореме Фалеса, мы получаем, что прямая PQ параллельна прямым BC и AD.