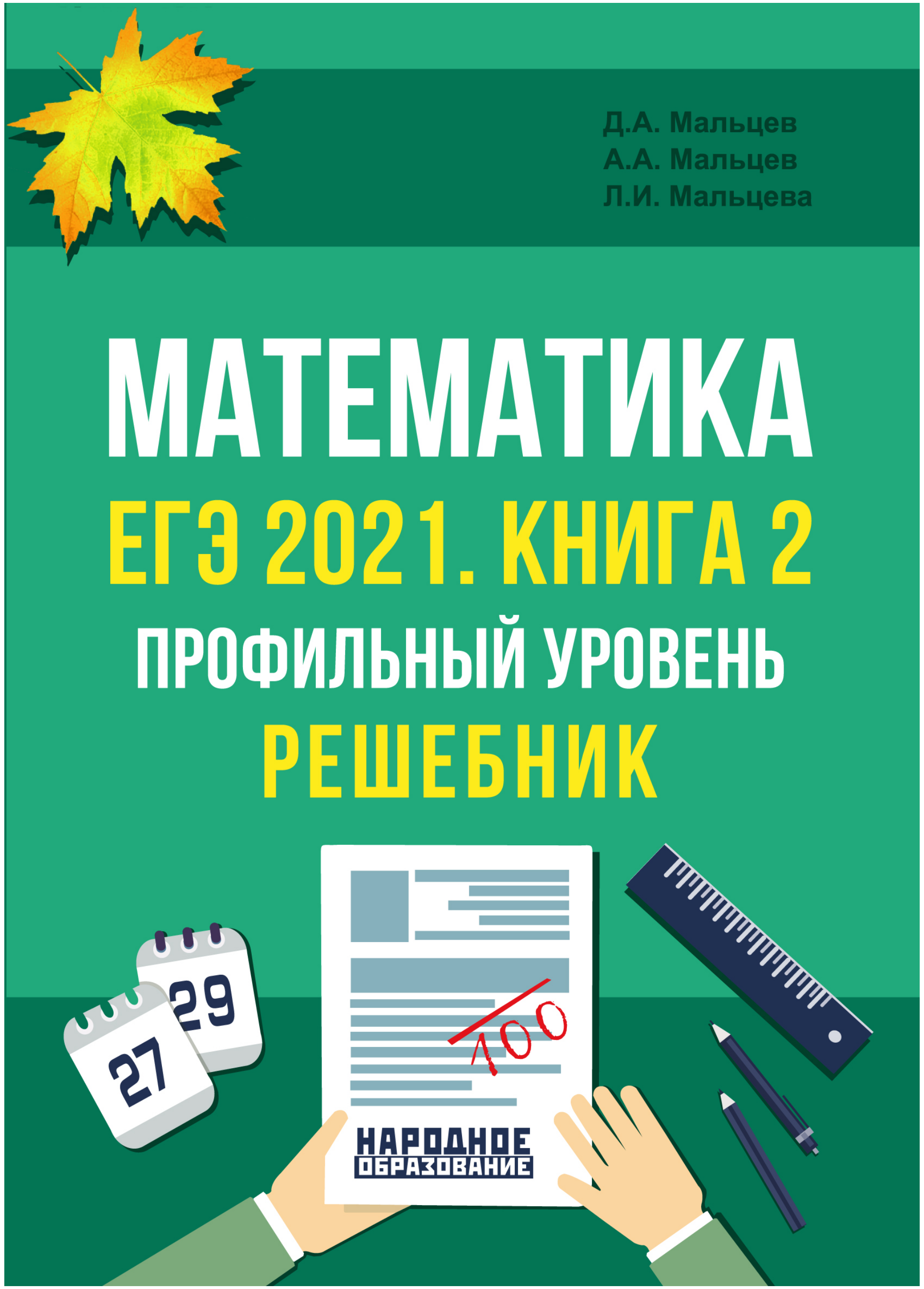


Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2021. Книга 2

Профильный уровень

Решебник

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2021

Содержание

Отавторов

Вданномпособииприведеныполныерешениязаданийср
ответомдлявсехтестовснечётныминомерами(т.е.тестов№1,№3ит.д.),
атакжерешениявсехзаданийснечётныминомерамииз3а
«Математика.ЕГЭ2021.Книга2.Профильныйуровень».Крометого,в
Решебникеданыуказанияикраткиерешениякзадачам№16(планимет-
рия)и№19 (олимпиаднаятематика)тестовсчётныминомерами.

Всерешениянаписаныдостаточноподробно,встилебеседысчитате-
лем.Отметим, чтохотянаэкзамеееенеприоформлениирешенийтребуется
меньшаястепееннподробнооостиим, выбранаав Выможете«взятьь
навооружени»исуспехмспользоватьнекоторыеизприёмовистил
оформлениярешений,которыеиспользованывданнойкниге.Например,
ключевыесловаифразы,наподобие«следовательно», «значит», «таким
образом», «таккак...,то...», помогутВамболееупорядоченноизлагать
своимысли.Ивполневозможно, чтовследствиеэтогоВыстанетесовер-
шатьменьшееколичествоошибокибыстреепривходитькправильному
ответу.

Данноепособиепоможетученикамприобрестиустойчивыенавыкив
решениирядазаданийисущественноповыситьуровеньматематической
культуры.А это,всвоюочередь,будетспособствоватьнетолькоуспеш-
нойсдачепоследующих экзаменов,нотакжеокажетнеоценимую помощь
вдальнейшемобучении—внезависимостиотвыбранног
альности.

ЖелаемВамуспеха!

Авторыблагодарятрецензентовзавнимательноепрочтениерукописи
иценныезамечания.

Возможны два случая: $a > b_1$ или $a < b_1$. В 1-ом случае минимум суммы $2a + b_1 + b_2 + \ldots + b_6$ достигается при $b_1 = 1$, $a = 33$ и равен: $2\cdot 33+1+17+9+1113+11+12=129$. Во 2-ом случае минимум суммы достигается при $a = $, $b_1 = 33$ и равен $2\cdot 1+33+17+25+21+23+22=143$. Так как $129\cdot 3 < 143\cdot 3$, то наименьшее число конфет у восьми ребят равно 387.

Ответ: а) да; б) нет; в) 387.

Тест №5

13. а) Решите уравнение:

$$2\log_2^2(\cos 2x) + 2\log_2(\cos 2x) + \log_2(2\cos 2x) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Так как $\log_2(2\cos 2x) = \log_2(\cos 2x)+1$, то, делая замену неизвестной $t = \log_2(\cos 2x)$, получаем уравнение: $2t^2 + 3t + 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются $t_1 = -1$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $\log_2(\cos 2x) = -1$ или $\log_2(\cos 2x) = -\frac{1}{2}$.

Решим уравнение $\log_2(\cos 2x) = -1$: $\cos 2x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$. А из уравнения $\log_2(\cos 2x) = -\frac{1}{2}$ получаем: $\cos 2x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $2x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi n$, где $n \in Z$.

б) Проведём отбор корней из серий $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$, принадлежащих отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого на тригонометрическом круге отметим точки, соответствующие чётным значениям $n = 2k$ и нечётным значениям $n = 2k+1$, см. рисунок 1. По рисунку видим, что в указанный промежуток попадают три корня: $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

рис.1

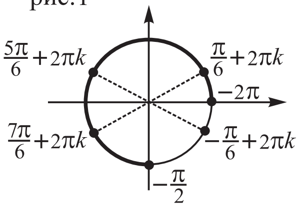
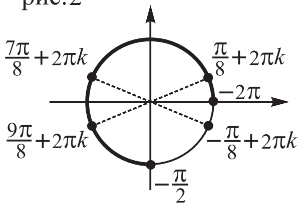


рис.2



Проведя аналогично отбор корней из серий $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, где $n\in Z$, см. рисунок 2, получим, что в указанный промежуток попадают корни: $\frac{\pi}{8}-2\pi=-\frac{15\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}-2\pi=-\frac{9\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}-2\pi=-\frac{7\pi}{8}$.

Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, где $n\in Z$;

б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{15\pi}{8}, -\frac{9\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8}$.

14. Дана пирамида $SABC$, в которой $AB=AC=SB=SC=17$, $BC=SA=16$. Точки M и N — середины рёбер BC и SA.

а) Докажите, что отрезок MN является общим перпендикуляром к прямым BC и SA.

б) Найдите объём пирамиды $ABMN$.

Решение.

а) Так как отрезки SM и AM — медианы в равнобедренных треугольниках SBC и ABC, проведённые к основанию BC этих треугольников, то $SM\perp BC$ и $AM\perp BC$, см. ниже рисунок 1. Таким образом, прямая BC перпендикулярна двум прямым плоскости ASM, поэтому она перпендикулярна этой плоскости и, в частности, $BC\perp MN$.

Аналогично, из равнобедренности треугольников CAS и BAS следует перпендикулярность прямой SA медианам CN и BN этих треугольников, а из перпендикулярности прямой SA к плоскости BCN следует, что $SA\perp MN$. Итак, нами доказано, что $MN\perp BC$ и $MN\perp SA$, ч.т.д.

рис. 1

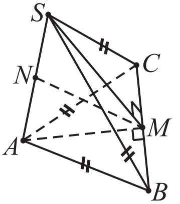
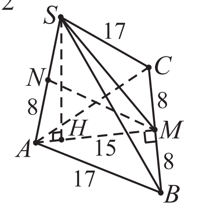


рис. 2



«Математика. ЕГЭ 2021. Книга 2. Профильный уровень. Решебник»
Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева

б) Так как N — середина SA, то расстояние d от точки N до плоскости ABC вдвое меньше, чем высота SH пирамиды $SABC$, а поскольку AM — медиана $\triangle ABC$, то площадь $\triangle ABM$ вдвое меньше площади $\triangle ABC$. Отсюда следует, что объём пирамиды $ABMN$ меньше объёма пирамиды $SABC$ в 4 раза: $V_{ABMN} = \frac{1}{3} d\cdot S_{ABM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{SH}{2}\cdot\frac{S_{ABC}}{2} = \frac{1}{4}V_{SABC}$.

Вычислим объём пирамиды $SABC$. В пункте а) было показано, что прямая BC перпендикулярна плоскости ASM, поэтому плоскость ABC, содержащая эту прямую, также перпендикулярна плоскости ASM. Следовательно, высота SH пирамиды лежит в плоскости ASM, т.е. является высотой к стороне AM треугольника SAM.

По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABM и SBM имеем: $AM = SM = \sqrt{17^2-8^2} = 15$ (см. выше рисунок 2), а из $\triangle AMN$ по теореме Пифагора находим, что $MN = \sqrt{15^2-8^2} = \sqrt{161}$. Высоту SH треугольника ASM найдём, выразив двумя способами площадь этого треугольника: $S_{ASM} = \frac{MN\cdot SA}{2} = \frac{SH\cdot AM}{2}$, откуда $SH = \frac{MN\cdot SA}{AM} = \frac{16\sqrt{161}}{15}$. Итак, объём пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{3}\cdot SH\cdot\left(\frac{1}{2}AM\cdot BC\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{16\sqrt{161}}{15}\cdot\frac{15\cdot 16}{2} = \frac{128\sqrt{161}}{3}$, а искомый объём пирамиды $ABMN$ в 4 раза меньше.

Ответ: $\frac{32\sqrt{161}}{3}$.

Примечание. Как видно по решению данной задачи, являющейся незначительной модификацией одной из задач реальных тестов ЕГЭ-2019, доказательство пункта а) достаточно простое и проводится буквально в несколько строк. То есть получить 1 балл за пункт а) совсем несложно. Но вот чтобы заработать ещё 1 балл за пункт б), необходимо не только привести некоторые дополнительные логические обоснования, но также безошибочно довести до конца числовые выкладки. При этом любая числовая ошибка, даже самая незначительная, даже на последнем этапе выкладок, приводит к тому, что все затраченные усилия будут оценены нулём!

Например, проведя верно все выкладки пункта б) в рассмотренной выше задаче, но забыв в спешке поделить на 4 найденный объём пирамиды $SABC$, и записав в ответ $\frac{128\sqrt{161}}{3}$ вместо $\frac{32\sqrt{161}}{3}$, выпускник получил бы за пункт б) ноль баллов, словно он к нему и не приступал!

Поэтому выпускникам, которые не являются «олимпиадниками высокого уровня» и не успевают решать за отведённое время все задания, а вынужденыраспределятьсвоиусилия,необходимотщательновзвешивать своисилы.Иесливидно, чтовыкладкипунктаб)достаточногромоздкие,то,возможно,нестоиттраааттитьнанихдрагоценноевремяизапасы умственнойэнергии,априступ ь к д р у г о м у з а д а н и ю .

Отметимещё, чторассмотреннаявышезадачадалеконесамаяслож---наяввычислительномплане,вреальныхтестааах ЕГЭбылизадачи,вко торыхвычислениясущественносложнее.Пофктузадание№14ужедавнопересталобыть «двухбалльным»и, поииидее,должнооцениваться по шкалеот0до3баллов.Тогдапривычислтельнойошибкевпунктеб) эксперт, проверяющийработу,будетиметьвозможность поставитьзаэтот пункт1балл (издвухвозможных).Сегодняже, привсёмсочувствиик выпускнику, практическивернорешившемупунктб),нодопустившему совсемнезначительнуюарифметическуюошибку, эксперттакойвозможностииилишён,ивынужденпокритериямпроверкизаданияоценитьвсе усил я у ч е н и к а н у л ё м !

Темнеменее,впланеэкзаменационнойработыЕГЭ-2020задание14 по-прежнемуууоцениваетсявсего2баллами(поодномузакаждыйизпунктов),итутжделокаждоговыпускникавернорассчитатьсвоисилыи принятьрешение,астоитли«бороться»за1балл пунктаб)задания14.

15. Решитенеравенство $\dfrac{100^{x^2+2x-12}-0{,}1^{3x^2-4x-101}}{0{,}04\cdot 25^{25x-4}-1}\leqslant 0.$

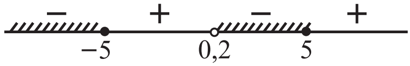
Решение.

Преобразуемданноевусловиинеравенство:

$$\frac{10^{2x^2+4x-24}-10^{-3x^2+4x+101}}{5^{-2}\cdot 5^{2(25x-4)}-1}\leqslant 0,\quad \frac{10^{-3x^2+4x+101}\cdot\left(10^{5x^2-125}-1\right)}{5^{50x-10}-1}\leqslant 0,$$

$$\frac{10^{5(x^2-25)}-1}{5^{50x-10}-1}\leqslant 0,\quad \frac{10^{5(x-5)(x+5)}-1}{5^{50(x-0{,}2)}-1}\leqslant 0.$$

Решимэтонеравенствометодоминтервалов.Знаменательдробиобращаетсявнульвточке $x=0{,}2$, ачислительобращаетсявнульвточках $x=-5$ и $x=5$. Этиточкиразбиваютчисловуюосьнапромежутки,внутрикоторыхкаждоеизвыражений $10^{5(x^2-25)}-1$ и $5^{50x-10}-1$ знакопостоянно.При $x>5$ выражение $\dfrac{10^{5(x^2-25)}-1}{5^{50x-10}-1}$ положительно,априпереходечерезкаждуюизточек $x=5$, $x=0{,}2$ и $x=-5$ ономеняетзнакнапротивоположный, поэтомувнутрипромежутковзнакопостоянстваегознактаков,какпоказанона рисункениже.



Ответ: $(-\infty; -5] \cup (0{,}2; 5]$

16. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L.

а) Докажите, что отрезки AL и BL равны.

б) Найдите длину отрезка CL, если $AC = 2$, $BC = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$.

Решение.

а) Чтобы доказать равенство отрезков AL и BL, достаточно доказать, что $\angle ABL = \angle BAL$. Заметим, что $\angle BAL = \angle BCL$ и $\angle ALB = \angle ACB$ (как углы, опирающиеся на одни и те же дуги), см. рис. 1. Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BCL = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Осталось заметить, что $\angle ABL = 180^\circ - \angle BAL - \angle ALB = 180^\circ - (90^\circ - \gamma/2) - \gamma = 90^\circ - \gamma/2$. Итак, $\angle BAL = 90^\circ - \gamma/2 = \angle LBA$, требуемое равенство углов доказано.

рис. 1

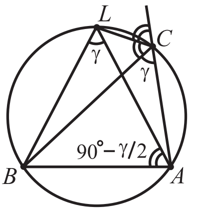
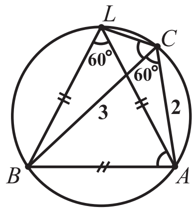


рис. 2



б) На рис. 2 отметим числовые данные задачи. Применяя теорему косинусов к $\triangle ABC$, получаем: $AB^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 7$. В пункте а) было доказано, что $AL = BL$, а так как по условию $\angle ACB = 60^\circ$, то $\angle ALB = 60^\circ$ и, значит, $\triangle ABL$ — равносторонний. Поэтому $BL^2 = AB^2 = 7$.

Пусть $CL = x$. Так как $\angle BCL = \angle BAL = 60^\circ$, то по теореме косинусов из $\triangle BCL$ имеем: $x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x = 1$ или $x = 2$, то есть $CL = 1$ или $CL = 2$.

Покажем, что $CL \neq 2$. Если предположить, что $CL = 2$, то $AC = CL$, при этом BC содержит биссектрису равнобедренного треугольника ACL и, значит, BC — серединный перпендикуляр к хорде AL. Но это означает, что BC — диаметр окружности, откуда следует, что $\angle BAC = 90^\circ$, а это невозможно, поскольку для треугольника ABC не выполняется теорема Пифагора: $BC^2 = 9$, $AC^2 + AB^2 = 11$, $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, т.е. $CL \neq 2$.

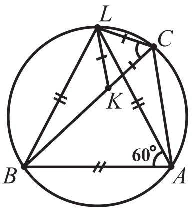
Ответ: 1

Примечание(длялюбителейгеометрии).

Обратитевнимание, чтопризаданныхвусловиидлинахотрезков AC и BC искомаядлинаотрезка CL оказаласьравна $BC-AC$ $(1=3-2)$. Данное«совпадение»отражаеттакойгеометрическийфакт—есливзять произвольнуюточкуописаннойокружностиравностороооннеготреугольникаисоединитьееееёсвершинамиэтоготреугольника,тбольшийизтрёх полученныхотрзсковбудетравенсуммедвухдругих.

Внашейситуациитреугольник ABL равносторонний,точка C лежитвнутрисегментаокружности,ограниченногохдой AL, поэтомуиз отрееезков AC,BC,CL наибольшимявляетсяотрезок BC, ивыполнено равнство $BC=AC+CL$.

Чтобыдоказатьданноеравенство,отложимнаотрезке BC отточки C такойотрезок CK, что $CK=CL$, см.данныйнижерисунок.



Треугольники CLK и ABL правильные, поэтомутреугольники BLK и ALC равныпопервомупризнакуравенстватреугольников(объясните подробно, почему $\angle BLK=\angle ALC$).Следовательно $BK=AC$ и,значит, $BC=BK+CK=AC+CL$, чтоитребовалосьдоказать.

17. Виюлепланируетсявзятькредитвбанкенасумму 40 млн.рублей нанекоторыйсрок,равныйцеломучислулет.Условиявозвратакредита таковы:

— каждыйянварьдолгвозрастаетна 15% посравнениюсконцомпредыдущегогода;

— сфевраляпоиюнькаждогогоданеобходимовыплатить частьдолга;

виюлекаждогогодадолгдолженбытьнаоднуитужесум долганаиюль предыдущегогода.

Чемубудетравнаобщаясуммавыплатпослеполногопогашениякре--- дита,еслинаибольшийгодовойплатёжсоставит 8 млн.рублей? (Считайте, чтоокругления привычисленииплатежейнепроизводятся.)

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$40;\ \frac{40(n-1)}{n};\ \frac{40(n-2)}{n};\ \ldots;\ \frac{40\cdot 2}{n};\ \frac{40}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 15%, значит, последовательность размеров долга (в млн. рублей) в январе такова:

$$46;\ \frac{46(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{46\cdot 2}{n};\ \frac{46}{n}.$$

Поэтому последовательность выплат будет такой:

$$\frac{46n-40(n-1)}{n};\ \frac{46(n-1)-40(n-2)}{n};\ \ldots;\ \frac{46\cdot 2-40}{n};\ \frac{46}{n},$$

или, после упрощений, $\frac{6n+40}{n};\ \frac{6(n-1)+40}{n};\ \ldots;\ \frac{6\cdot 2+40}{n};\ \frac{6\cdot 1+40}{n}.$

Наибольшая из выплат равна $\frac{6n+40}{n}$, что по условию составляет 8 млн. рублей. Значит, $\frac{6n+40}{n}=8,\ n=20.$

Подставив $n=20$ в выражение

$$\frac{(6n+40)+\big(6(n-1)+40\big)+\ldots+(6\cdot 1+40)}{n},$$

получим, что всего нужно выплатить $\frac{6\cdot(20+19+\ldots+1)+40\cdot 20}{n} = 6\cdot\frac{21}{2}+40=103$ (млн рублей).

Ответ: 103 млн рублей.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{21x^2-10ax+a^2}{x^2-2x+a}=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:

$$(*)\quad \begin{cases} x^2-2x+a\neq 0 \\ 21x^2-10ax+a^2=0 \end{cases}$$

Уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D=4-4a$ положителен $\Leftrightarrow$ $a<1$.

Так как $21x^2-10ax+a^2=(3x-a)(7x-a)$, то при любых значениях a корнями уравнения $21x^2-10ax+a^2=0$ являются $x=\frac{a}{3}$ и $x=\frac{a}{7}$.

Система $(*)$ имеет ровно два различных решения $\Leftrightarrow$ уравнение

$x_2-2x+a=0$ имеетдваразличныхкорняиэтикорнинесовпадают с $x=\frac{3}{a}$ и $x=\frac{7}{a}$. Поэтому дляполученияответавзадаченужноиз промежутка $(-\infty;1)$ исключитьтезначения a, длякоторых $x=\frac{3}{a}$ или $x=\frac{7}{a}$ являетсякорнемуравнения $x_2-2x+a=0$.

Подставимпоочерёдно $x=\frac{3}{a}$ и $x=\frac{7}{a}$ вуравнение $x_2-2x+a=0$:

$\frac{9}{a_2}-\frac{2\cdot 3}{a}+a=0,\ a_2+3a=0,\ a(a+3)=0,\ a=0$ или $a=-3$;

$\frac{49}{a_2}-\frac{2\cdot 7}{a}+a=0,\ a_2+35a=0,\ a(a+35)=0,\ a=0$ или $a=-35$.

Исключаяизпромежутка $(-\infty;1)$ значения $a=0$, $a=-3$ и $a=-35$, получаемответ.

Ответ: $a\in(-\infty;-35)\cup(-35;-3)\cup(-3;0)\cup(0;1)$

19. Настолележат 50 карточек,каждаяизкоторых либозелёного, либо оранжевогоцвета, приэтомкаждогоцветаесть хоootябыоднакарточка.На каждойизкарточекнаписанонатуральноечисл , причёмчисланавсееех зелёныхкарточкахразлллиичны,ачислоналюбойизоранжевыхкарточк меньше, чемчислонаюбойиззелёных.Среднееарифметическоечисел нннааавсехкарточкахравно22. Еслиувеличитьв 3 разакаждоеизчисел, писанныхназелёныхкарточках,тосреднееарифметическоевсех чисел станетравно 48.

а) Можетлинастолележатьровно 20 зелёныхкарточек?

б) Можееетлинастолележатьровно 20 оранжевыхкарточек?

в) Каконаибольшеечислозелёныхкарточекможетлежатьнастоле?

Решение.

Таккаксреднееарифметическоечиселнавсех 50 карточкахравно 22, тосуммачиселнавсехкарточкахравна $50\cdot 22=1100$. Пусть z — сумма чиселназелёныхкарточках,а y — сумма чисел на всех оранже карточках.Тогда $z+y=1100$

Послеувеличенияв 3 разавсех чисел,написанныхназелёныхкарточ--- ках,суммачиселнавсехкарточкахстанетравна $3z+y$. А так как по условию среднееарифметическоевсех 50 чисел приэтомстановитсяравно 48, тоэтасуммастановитсяравна $50\cdot 48=2400$. Значит, $3z+y=2400$

Такимобразом,

$$\begin{cases} z+y=110000 \\ 3z+y=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+y=1100 \\ 2z=2400-1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+y=1100 \\ z=650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=450 \\ z=650 \end{cases}$$

Заметим, что верно и обратное: если $y=450$ и $z=650$, то все условия задачи о среднем арифметическом чисел на карточках будут выполнены.

а) Если на столе лежит 20 зелёных карточек, то число оранжевых карточек равно 30. Чтобы сумма чисел на всех оранжевых карточках была равна 450, примем, что на всех 30 карточках написано число 15. Тогда для выполнения условий задачи числа на всех зелёных карточках должны быть не меньше 16 и различны, а их сумма должна быть равна 650. Так как $\underbrace{16+17+\ldots+34+35}_{\text{20 чисел}}=\frac{51}{2}\cdot 20=510<650$, то взяв на 19 зелёных карточках числа $\underbrace{16,17,\ldots,34}_{\text{19 чисел}}$, а на одной зелёной карточке число, равное $35+(650-510)=175$, мы получим, что все условия задачи выполнены.

Ответ в пункте а) — да, может: если числа на 30 оранжевых карточках равны 15, а на 20 зелёных карточках написаны числа $\underbrace{16,17,\ldots,34}_{\text{19 чисел}},175$, то все условия задачи выполнены.

б) Допустим, что на столе ровно 20 оранжевых карточек. Тогда среди них обязательно найдётся такая, на которой написано число, не меньшее, чем 23: в самом деле, если бы числа на всех оранжевых карточках не превосходили 22, то их сумма не превосходила бы $22\cdot 20=440$, но это противоречит условию $y=450$.

Так как на одной из оранжевых карточек написано число, не меньшее, чем 23, то число на любой из зелёных карточек не меньше 24. А поскольку числа на всех 30 зелёных карточках различны, то их сумма не меньше, чем $\underbrace{24+25+\ldots+52+53}_{\text{30 чисел}}=\frac{24+53}{2}\cdot 30=1155$. Но это противоречит условию $z=650$. Следовательно, допущение о том, что на столе может лежать ровно 20 оранжевых карточек, неверно.

в) Покажем, что 23 и более зелёных карточек на столе быть не может. Если предположить, что количество зелёных карточек 23 (или больше), то количество оранжевых карточек 27 (или меньше). Поэтому найдётся оранжевая карточка, на которой написано число, не меньшее, чем $\frac{450}{27}$, то есть не меньшее 17 (иначе $y\leqslant 16\cdot 27=432$, что противоречит условию $y=450$). Но тогда сумма чисел на всех зелёных карточках не меньше, чем $\underbrace{18+19+\ldots+40}_{\text{23 числа}}=\frac{58}{2}\cdot 23=667$, что противоречит условию $z=650$.

Следовательно, предположениеотом, чтоколичествозелёныхкарточек можетбытьравно 23 и более, неверно.

Приведёмпример, показывающий, чтонастолеможетбытьровно 22 зелёныхкарточки.Еслинастолележат 21 зелёнаякарточкасчислами $\underbrace{18, 19, \ldots, 38}_{21\text{ число}}$ и одна зелёная карточка с числом 62, а также 26 оранжевых карточексчислом 16 и две оранжевых карточки с числом 17, то $z = 18 + 19 + \ldots + 38 + 62 = \frac{18+38}{2} \cdot 21 + 62 = 650$, $y = 26 \cdot 16 + 2 \cdot 17 = 450$ — приэтомвсеусловиязадачивыполнены.

Такимобразом,наибольшеевозможноечислозелёныхкарточек— 22.

Ответ: а)да;б)нет;в) 22.

Примечание. Решениепунктаа)можносокраааатитьоченьсущественно.Достаточнобылобынааписать:«ответвпункте) — да, может». А далее сразу привестивышеуказнныйпример,добавиввконце: «$z = 16 + 17 + \ldots + 34 + 175 = \frac{16+34}{2} \cdot 19 + 175 = 650$, $y = 30 \cdot 15 = 450$, т.е.всеусловия задачивыпоооолнены».

Приофрмлениирешениянаэкзаменеименнотакинужноделать — ограничиватьсянеобходимымминимумом.Приведённоевышерешение пунктаа)содержитизбыточнуюинформацию лишьдлятого, чтобыпоказать,какможнорассуждатьдля построениятребуемогопримера.

Тест№7

13. а)Решитеуравнение $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Укажитекорниэтогоуравнения, принадлежащиеотрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуемисходноеуравнение: $2 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$. Послезаменынеизвестной $\sin x = t$ получимуравнение $2t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0$, корнямикоторогоявляются $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t = \sqrt{2}$. Значит, $\sin x = \sqrt{2}$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ корнейнеимеет.Уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ имееткорни $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

б) Проведёмотборкорнейизсерии $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$, принадлежащихотрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ Для этогонатригонометрическомкру-